練習問題解答例

練習問題 1.1 30 人のクラスの誕生日の組み合わせの根元事象はどのようなものか？一つの根元事象の確率はどのように決めればよいか？更に，30 人の誕生日がすべて異なる確率を求めよ．

解答　クラスの 30 人に番号をつけて，i 番目の人の誕生日を x_i と書くことにすると根元事象は

$$\omega = \{x_1 = b_1, x_2 = b_2, \ldots, x_{30} = b_{30}\}$$

と表すことができる．ここに各 $j = 1, 2, \ldots, 30$ に対して

$$b_j \in B = \{1/1, 1/2, \ldots 12/31\}$$

と 1 月 1 日から 12 月 31 日まで 365 日を順に並べた集合 B を使って表すことができる．2/29 を付け加えてうるう年を考慮に入れてもよいが，ここではそこまで面倒なことはしないでおく．

根元事象を

$$\omega_j = 1/1, 1/2, \ldots, 12/31$$

とした人が多かったが，これは一人の人の誕生日 (われわれはその情報をまったく知らないという設定の下で）を考えたときの根元事象になる．二人の人の誕生日を一緒に考えるとそれぞれの可能性が 365 通りあるから合計では 365^2 個の組み合わせの可能性がある．(最初の人の誕生日と 2 番目の人の誕生日を入れ替えると，違う場合になることにも注意が必要．

30 人の誕生日のあり方は合計で 365^{30} 通りとなり，どれも同じくらい確からしいとして，それぞれの根元事象の確率はみな同じで 365^{-30} となる．

一番目の人の誕生日の可能性は 365 通りで，2 番目の人はこれと違う誕生日を持つ可能性は 364 通り，3 番目の人が最初の二人と違う誕生日である可能性は 363 通り，と 1 ずつ減っていくので，30 人がすべて違う誕生日である場合の数は

$$365 \times 364 \times \ldots (365 - 29)$$

となる．したがって求める確率（ 30 人がすべて誕生日が違う確率）は，

$$1 \times \left(1 - \frac{1}{365}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{29}{365}\right)$$

となる．(参考までに計算してみると，この確率は $0.2937\ldots$ となり，3 割に達していない．)

練習問題 1.2 偏りのないサイコロを 2 回投げる．このときの根元事象はどのようなものか．その確率を求めよ．更に，この確率空間で確率変数を 10 個作れ．

解答　根元事象は $i_1, i_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}$ に対して

$$\omega(i_1, i_2) = \{1 \text{ 回目で } i_1 \text{ の目が出て，} 2 \text{ 回目で } i_2 \text{ の目が出る }\}$$

となり，サイコロに偏りが無ければこの根元事象の確率は i_1, i_2 に関わり無く 1/36 である．答案の中で，この確率空間で 10 個の確率変数を作る**最も横着な方法**は

$$X_j(\omega(i_1, i_2)) = j, \qquad j = 1, 2, 3, \ldots, 10$$

でした．おめでとうございます.（？おめでたいのかどうか？まぁ，いいんじゃないですか？）

工夫して

$$X(\omega(i_1, i_2)) = i_1^{i_2}$$

なんて関数をいろいろと考えてくれた人もかなりいました．うれしいですね．日本の未来は明るいね．

例としては次のような関数を出しておきましょう．

$$
\begin{aligned}
X_1(\omega(i_1, i_2)) &= i_1 \\
X_2(\omega(i_1, i_2)) &= i_2 \\
X_3 &= \alpha X_1 + \beta X_2 \qquad (\alpha, \beta \text{ は実数 }) \\
X_4 &= X_1 + X_2 \text{ mod} 2 \\
X_5 &= e^{\alpha X_3} \\
X_6 &= {X_3}^n \\
X_7 &= \frac{1}{1 + X_2^2} \\
X_8 &= \begin{cases} 1, & X_1 = X_2 = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \\
X_9 &= \text{Arctan} X_5 \\
X_{10} &= \begin{cases} 1, & \text{if } X_1 > X_2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

練習問題 1.3 例 1.9 の確率変数 X_1, X_2, X_3 のそれぞれについてその分布を求めよ．

解答　X_1 の値域は

$$\{\sin k, k = 1, 2, \ldots, 6\}$$

これらはすべて違う値になる[1]．したがって

$$P(X_1 = \sin k) = P(\omega_k) = \frac{1}{6} \qquad k = 1, 2, \ldots, 6$$

X_2 の値域は $\{1, 4, 9, 16, 25, 36\}$ で，対応は 1 対 1．よって

$$P(X_2 = k^2) = P(\omega_k) = \frac{1}{6}$$

X_3 の値域は自然数を 2 で割ったあまりの $\{0, 1\}$ である．

$$\{\omega \in \Omega; X_3(\omega) = 1\} = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$$

となり，

$$P(X_3 = 1) = P(\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}) = \frac{1}{2}$$
$$P(X_3 = 0) = P(\{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}) = \frac{1}{2}$$

[1] $\sin k = \sin j$ としてみると半角の公式から

$$\sin\frac{k-j}{2}\cos\frac{k+j}{2} = 0$$

これから

$$\frac{k-j}{2} = 0 \mod \pi, \qquad \text{または } \frac{k+j}{2} = \frac{\pi}{2} \mod \pi$$

k, j は整数だからこれは矛盾