練習問題解答例

http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/higuchi/index.html

練習問題 1.6 X が $\{1,2,\ldots,n\}$ の一様分布のとき，分散 $V(X)$ を求めよ．

解答

期待値は講義で計算したとおり

$$EX = 1\cdot\frac{1}{n} + n\cdot\frac{1}{n} + \ldots + n\cdot\frac{1}{n} = \frac{n+1}{2}$$

だった．分散の計算のため $E(X^2)$ を求める．

$$\begin{aligned} E(X^2) &= 1^2\cdot\frac{1}{n} + 2^2\cdot\frac{1}{n} + \ldots n^2\cdot\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n}\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right) \\ &= \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

したがって分散は

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{(n+1)(4n+2-3n-3)}{12} = \frac{n^2-1}{12}.$$

和の公式

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

を忘れた人が多かったですね．これは $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ から次のように導かれます．

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N}(n^2+n)\right) \\ &\quad\text{左辺} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k}^{N} k = \sum_{k=1}^{N}(N+1-k)k = \frac{N(N+1)^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} k^2 \\ &\quad\text{右辺} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} n^2 + \frac{N(N+1)}{4} \end{aligned}$$

$S = \sum_{k=1}^{N} k^2 = \sum_{n=1}^{N} n^2$ とかくと，上の計算から

$$\frac{3}{2}S = \frac{N(N+1)^2}{2} - \frac{N(N+1)}{4} = \frac{N(N+1)(2N+1)}{4}$$

これから

$$S = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

となります．公式を覚える方が早いですね．

練習問題 1.7 X が負の 2 項分布 $NB(n,p)$ に従うときの分散 $V(X)$ を求めよ．使うのは次の式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}a^k b^n=(a+b)^{-n}.$$

解答

みんな苦労してました．しっかり正しい答にたどり着いた人も数人いました．ご苦労さん．上のヒントの a,b が何を意味するのか分からずそのまま

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^2\binom{n+k-1}{k}a^k b^n$$

を計算した人もいました．k^2 をかけているところはさすがですが．$EX=n(1-p)/p$ だったので，これも $E(X^2)$ を計算する．計算の味噌は $k^2=k(k-1)+k$ と変形するところにあります．

$$\begin{aligned}
E(X^2)&=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\binom{n+k-1}{k}(1-p)^k p^n\\
&=\sum_{k=0}^{\infty}\{k(k-1)+k\}\frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}(1-p)^k p^n\\
&=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(n+k-1)!}{(k-2)!(n-1)!}(1-p)^k p^n+EX\\
&=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(n+j+1)!}{j!(n-1)!}(1-p)^{j+2}p^n+n\frac{1-p}{p}\\
&=n(n+1)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(n+2+j-1)!}{j!(n+1)!}(1-p)^{j+2}p^n+n\frac{1-p}{p}\\
&=n(n+1)\frac{(1-p)^2}{p^2}\sum_{j=0}^{\infty}\binom{n+2+j-1}{j}(1-p)^j p^{n+2}+n\frac{1-p}{p}\\
&=n(n+1)\frac{(1-p)^2}{p^2}(1-p+p)^{-(n+2)}+n\frac{1-p}{p}\\
&=n(n+1)\frac{(1-p)^2}{p^2}+n\frac{1-p}{p}
\end{aligned}$$

これより

$$V(X)=n(n+1)\frac{(1-p)^2}{p^2}+n\frac{1-p}{p}-n^2\frac{(1-p)^2}{p^2}=n\frac{1-p}{p^2}.$$

練習問題 1.8 (難) Coupon Collecter's problem

ガムやキャラメルに何種類かのカードをつけて，コレクターを誘う商売は昔からある．今，10 種類のカードのどれかがランダムに (同じ確率で）入っているガムが売っているとする．10 種類のカードを集めるまでに平均何個のガムを買わないといけないことになるか？

解答

やらないでいいと言ってましたが，やってくれている人がいました．残念ながら惜しいところで間違っていましたが．嬉しいですね．

さて、この Coupon collecter's problem ですが，次のように考えます．1 枚目のカードは，1 回ガムを買えば必ず手に入るので，1 枚目が揃うまでに買うガムの期待値は 1 です．

その後，2 枚目のカードを手に入れる確率は 10 種類のカードのうち最初のカードと違う種類は 9 種類なので，最初のカードと違う種類のカードを引いて成功する確率は $\frac{9}{10}$ なので，これを成功するまで繰り返し，何回目に成功するかを見ると，この分布は first success 分布従って， 2 枚めを引き当てるまでに買わないといけないガムの数の期待値は成功の確率の逆数で $\frac{10}{9}$. 従って 2 枚目のカードが揃うまでに買うガムの総数の期待値は

$$1 + \frac{10}{9}$$

その後 3 枚目を手に入れるには成功の確率 $\frac{8}{10}$ の first success 分布の試行を行うので (2 枚は揃った状態から) 3 枚目が新たに手にいるまでに買わないといけないガムの数の期待値は 10/8.

以下，同様に考えると最後の種類のカードを手に入れるまでにトータルで勝ったガムの量は

$$10 \sum_{j=1}^{10} \frac{1}{j}$$

となる．計算してみるとこれは 29.3 ほどになる．

それほど多い数でもないですね．だから昔からこの手の商売が成り立っているのでしょう．ところがコレクターが熱狂的になると新しくこのなかになかなか手にいりにくいカードを混ぜるという手法が可能になります．今だとガチャポンなどがそうなのでしょうか．携帯ゲーム (モバゲー？) なども同じ種類の商売と見えますね．

1980 年代にはビックリマンシールを集めるというのが流行り，これはチョコについていたのですが，カードだけ欲しいためにチョコは食べずに捨てていた子供がたくさんいて社会問題になりました．