

練習問題解答例

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/higuchi/index.html>

練習問題 1.9 X が $[0, 5]$ 上の一様分布の時密度関数 $f(x)$ と期待値 EX , 分散 $V(X)$ を計算せよ.

解答密度関数は

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 0 \leq x \leq 5, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となるので, 期待値は

$$EX = \int_0^5 \frac{x}{5} dx = \frac{5^2}{2 \cdot 5} = \frac{5}{2}.$$

$E(X^2)$ は

$$E(X^2) = \int_0^5 \frac{x^2}{5} dx = \frac{5^3}{3 \cdot 5} = \frac{25}{3}$$

なので, $V(X)$ は

$$V(X) = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{25}{3} - \frac{25}{4} = \frac{25}{12}.$$

講評 さすがにこれはよくできていました. $[a, b]$ 上の一様分布の期待値と分散を求めて澄ましていた人がいましたが, $a = 0, b = 5$ を最後に代入するくらいは思いついてください.

練習問題 1.10 X が正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとき $Z = \frac{x-m}{\sigma}$ は $N(0, 1)$ に従うことを確かめよ. 実際には任意の実数 t に対して

$$P(Z \leq t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-z^2/2} dz$$

と言う式を確かめよ.

解答 これは正しくは

「正規分布を持つ確率変数の線形変換でできる新しい確率変数はやはり正規分布である」

という事実を使って, $EZ = 0, V(Z) = 1$ を示するのが普通ですが, まだ上の事実は言っていないので, 次のように計算するのを正解とします.

$$P(Z \leq t) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq t\right)$$

だから, X の密度関数を使ってこの確率を表すと

$$P\left(\frac{X-m}{\sigma} \leq t\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{\{\frac{x-m}{\sigma} \leq t\}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

2

となる．ここで $z = \frac{x-m}{\sigma}$ と変数を変換すると

$$\text{右辺} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{z \leq t\}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

講評 見かけがゴツいので恐れをなした人も多かったようですが，単なる変数変換の問題です．正規分布の計算はこうやって変数変換をして標準正規分布に直してから計算する（または正規分布表を読む）のが常套手段です．