

練習問題解答例

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/higuchi/index.html>

練習問題 2.3 二つの集合 A, B が等しい事を示すには $A \supset B$ かつ $A \subset B$ を言う. $A \subset B$ を示すには, A の勝手な要素 $\omega \in A$ が $\omega \in B$ を満たすことを言う.

$A \subset \Omega$ のとき,

$$A^c = \{\omega \in \Omega; \omega \notin A\}$$

と定義するとき,

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

を証明してみよ.

解答 ベン図を使うと簡単なのに, 言葉で言うと難しいですね. 次のように議論します.

- $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$ について:
 $\omega \in (A \cap B)^c$ として $\omega \in A^c \cup B^c$ を言う. 結論を言うには, $\omega \in A$ ならば $\omega \in B^c$ を言えば良い (このとき $\omega \in A^c \cup A \cap B^c \subset A^c \cup B^c$.)
 そこで, $\omega \in A$ としよう. 仮定から $\omega \in (A \cap B)^c$ なので, $\omega \in B$ ならば $\omega \in A \cap B$ となるので矛盾. つまり $\omega \in B^c$ でなくてははいけない.
- $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$ について:
 最初に $A \supset A \cap B$ だから $A^c \subset (A \cap B)^c$ に注意する (実際, $\omega \in A \cap B$ ならば $\omega \in A$ となるが, いま $\omega \in A^c$ としているので, これは不可能. つまり $\omega \in (A \cap B)^c$ でなくてはならない.) 同じように $B^c \subset (A \cap B)^c$ も成り立つので,

$$A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$$

(実際, $\omega \in A^c \cup B^c$ ならば $\omega \in A^c$ または $\omega \in B^c$ となっているが, どちらの場合も上で言ったように $\omega \in (A \cap B)^c$ となっているから.)

講評 数学科の学生は論理の練習をしているのでなれていますね. 他の人たちもベン図はかけているので, 分かってはいるようです.

練習問題 2.4 Ω の部分集合の集合族 \mathcal{A} が algebra であるとは,

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A}$ ならば $A^c \in \mathcal{A}$.
3. $A, B \in \mathcal{A}$ ならば $A \cup B \in \mathcal{A}$.

となるときに言う. \mathcal{A} が algebra のとき, 次を示せ.

$$A, B \in \mathcal{A} \text{ ならば } A \cap B \in \mathcal{A}$$

解答 $A, B \in \mathcal{A}$ とすると, algebra の条件 (ii) から $A^c, B^c \in \mathcal{A}$ がでる.

すると algebra の条件 (iii) を使うと $A^c \cup B^c \in \mathcal{A}$ となるが, 上の問題の結果から $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ なので $(A \cap B)^c \in \mathcal{A}$ が分かる.

そうするともう一度 algebra の条件 (ii) を使って $A \cap B = \{(A \cap B)^c\}^c \in \mathcal{A}$ となる.

講評 こういう推論の問題は, まったく初めからやることは少ないので, 何を仮定して何を使っていいのか分かりにくいのが欠点です. まったく何も知らないところから積み上げれば誰でも分かるのですが, 時間がかかるので講義ではなかなかできませんね. 分からなかった人は, どこが分からなかったか確かめておいてください. そこが, こういう論理の問題であなたがよく知らないところのはずです.