

## 練習問題解答例

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/higuchi/index.html>

練習問題 2.5  $X$  を 2 乗可積分とし,  $EX = m$  とするとき,

$$P(X \geq m + a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

を証明せよ.

解答  $X$  が 2 乗可積分とは  $X^2$  が可積分であることを言います. したがって分散  $V(X) = E(X - m)^2 = E(X^2) - m^2$  も有限です. 確率変数としては  $Y = (X - m)^2 \geq 0$  を考えましょう. すると  $f(x) = x1_{\{x \geq 0\}}$  は単調非減少, 非負なので Chebyshev の不等式が使えて

$$P(Y \geq \lambda) \leq \frac{E[f(Y)]}{f(\lambda)} = \frac{E[(X - m)^2]}{\lambda} = \frac{V(X)}{\lambda}$$

が  $\lambda > 0$  に対して成り立つ. ここで  $\lambda = a^2$  とすると

$$P(Y \geq a^2) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

ところで,

$$\{Y \geq a^2\} = \{|X - m| \geq a\} \supset \{X \geq m + a\}$$

だから,

$$P(X \geq m + a) \leq P(Y \geq a^2) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

講評