

## 練習問題解答例

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/higuchi/index.html>

練習問題 2.6 次の分布の分布関数を求めよ .

(i) 区間  $[a, b]$  上の一様分布は

$$\mu(A) = \frac{1}{b-a} \int_{A \cap [a,b]} dx$$

である .

(ii) 2項分布  $B(3, 0.5)$ .

(iii) パラメータ 1 のポアソン分布

解答 (i)  $[a, b]$  上の一様分布の分布関数は, 密度関数が

$$\frac{1}{b-a} \cdot 1_{[a,b]}(x)$$

となるので, 分布関数はこれを  $-\infty$  から  $t$  まで積分して

$$F(t) = \int_{-\infty}^t 1_{[a,b]}(x) dx = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ \frac{t-a}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 1 & b \leq t \end{cases}$$

(ii)  $i$  に集中したディラック分布  $\delta_i$  の分布関数を  $F_i(t)$  と書くと,  $B(3, 0.5)$  の分布関数は

$$F(t) = \sum_{i=0}^3 \binom{3}{i} \frac{1}{2^3} F_i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{8} & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{2} & 1 \leq t < 2 \\ \frac{7}{8} & 2 \leq t < 3 \\ 1 & 3 \leq t \end{cases}$$

となる .

(iii) 同様にディラック分布  $\delta_i$  の分布関数  $F_i(t)$  を使うと,

$$F(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{e \cdot i!} F_i(t)$$

これは  $n \leq t < n+1$  のとき

$$F(t) = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} e^{-1} = \sum_{i=0}^{[t]} \frac{1}{i!} e^{-1}$$

とかける .

講評 ディラック分布の扱い方に戸惑う人が結構いました．特に (iii) は無限の場合分けが必要なので，どう書いて良いのか戸惑った人もいた様です．ディラック分布の分布関数が  $i$  で高さ 1 だけジャンプして増える階段関数なので，(ii) や (iii) はこの高さがそれぞれの点  $i$  の確率  $\mu(i)$  の値にかわったものを足し合わせることとなります．結果はやはり自然数で増加する階段関数の形です．(ii) では増加する点は 3 までですね．