練習問題解答例

http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/higuchi/index.html

練習問題 3.1 X, Y が独立でそれぞれが密度関数 $f_X(x), f_Y(y)$ を持つとき，

$$P((X,Y) \in B) = \int_B f_X(x) f_Y(y) dx dy \tag{3.1}$$

が任意の *2* 次元ボレル集合 B に対して成り立つ．このことを使って，X がパラメータ $\alpha > 0$ の指数分布に従い，Y がパラメータ $\beta > 0$ の指数分布に従うとき，X, Y が独立ならば

$$P(X \leq Y) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} \int_x^\infty \beta e^{-\beta y} dy dx$$

とかけることになる．この確率を求めよ．また，なぜこの式が成り立つのか？ *(3.1)* を使って説明してみよ．*(B* をどうとるのか？)

解答　後半はうるさく言うと面倒ですが（講義で言ったことだけから証明しようとするとルベーグ積分の議論をすべて繰り返すことになります．Fubini の定理が必要ですね．さすがにこれは求めていません.)，ほとんど明らかとも言えるので，どう書くか悩ましいところではあります．次のような解答で充分です.

$$\begin{aligned}
P(X \leq Y) &= P((X,Y) \in \{(x,y) \in [0,\infty)^2;\, x \leq y\}) \\
&= \int_{\{(x,y)\in[0,\infty)^2;\, x \leq y\}} \alpha e^{-\alpha x} \beta e^{-\beta y} dx dy \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty 1_{\{x \leq y\}} \alpha e^{-\alpha x} \beta e^{-\beta y} dx dy \\
&= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} \left(\int_x^\infty \beta e^{-\beta y} dy \right) dx \\
&= \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} e^{-\beta x} dx \\
&= \frac{\alpha}{\alpha + \beta}
\end{aligned}$$

講評　重積分の計算ができれば問題はなかったですね．なぜこれでいいかはなかなか書きにくい．減点されたにしても真剣に悩んだ人はこちらの出題の意図が分かった人です．おめでとう.（「じゃあボーナス点くれ」と言われそうだけど．これでもあげてる方です．我慢してください）