練習問題解答例

http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/higuchi/index.html

練習問題 3.2 X が正規分布 $N(m,\sigma^2)$ に従い，Y が正規分布 $N(a,v^2)$ に従い，X と Y が独立ならば，$X+Y$ の分布は正規分布 $N(m+a,\sigma^2+v^2)$ となることを確かめよ．

練習問題 3.3 ポアソンの少数の法則を特性関数を用いて証明せよ。つまり、$np_n \to \lambda > 0$ のとき、$B(n,p_n) \to P(\lambda)$ が分布の収束の意味で成り立つことを証明せよ．

練習 3.2 の解答　$X+Y$ の特性関数を計算する．独立性から

$$\begin{aligned}\varphi_{X+Y}(t) &= E(e^{it(X+Y)}) \\ &= E(e^{itX})E(e^{itY}) \\ &= e^{itm-\frac{\sigma^2t^2}{2}}e^{ita-\frac{t^2v^2}{2}} \\ &= e^{it(m+a)-\frac{t^2(\sigma^2+v^2)}{2}}\end{aligned}$$

最後の式は $N(m+a,\sigma^2+v^2)$ の特性関数と一致．特性関数は分布と 1 対 1 に対応するから $X+Y$ の分布は $N(a+m,\sigma^2+v^2)$. □

練習 3.3 の解答　まず 2 項分布 $B(n,p_n)$ の特性関数を求める．

$$\varphi_{B(n,p_n)}(t) = (1+p_n(e^{it}-1))^n$$

$n\to\infty, np_n \to \lambda$ のとき $np_n \le 2\lambda$ としてよい．(十分大きな n では正しい)

対数をとって

$$\log\varphi_{B(n,p_n)}(t) = n\log(1+p_n(e^{it}-1))$$

$p_n \le \frac{2\lambda}{n}$ としてよいので，さらに n が十分大なら $|p_n(e^{it}-1)| \le \frac{1}{2}$ とできるので $|z|<1$ のときの $log(1+z)$ のテイラー展開を $z=p_n(e^{it}-1)$ として 2 次まで行うと

$$\log\varphi_{B(n,p_n)}(t) = n(p_n(e^{it}-1)+O(p_n^2)) = np_n(e^{it}-1)+O(1/n)$$

とかける．これより $np_n \to \lambda$ だから

$$\log\varphi_{B(n,p_n)}(t) \to \lambda(e^{it}-1)$$

つまり $\varphi_{B(n,p_n)}(t) \to e^{\lambda(e^it-1)}$ となり，$B(n,p_n)$ が分布の意味で $P(\lambda)$ に近づくことが分かる．

講評　皆さん大体できていましたが，$(1+\frac{1}{n})^n \to e$ から複素数の a に対してどう $(1+\frac{a}{n})^n \to e^a$ を言おうとするか，見ていたのですが，そこはスルーしている人が多かったですね．上のように $\log(1+z)$ のテイラー展開を利用するのが数学的には一番きっちりしています．正規分布の問題は皆さんよくできていました．