

第1章 離散確率空間

1.1 確率の問題の例

例 1.1 (共通の誕生日)

- (1) 受講生 30 人の教室に誕生日が同じ二人の人がいるか？
 (2) ある家族で、おじいさん、お母さん、子どもの 3 人が同じ誕生日だった。これはどのくらい珍しいことだろうか¹？

例 1.2 (馬に蹴られて死んだ騎兵の数)

プロシアの 10 の騎兵軍団で 20 年間に死んだ兵士の数は 122 人で、1 年間 1 軍団あたりの死者の数に直すと²次の表を得た(ポルトキーウ³ イッツ)。これは理論値と良く合っているとされている。理論値はパラメータ 0.61 のポアソン分布。

死者の数 (1 年間 1 軍団あたり)	軍団数	理論値
0	109	108.7
1	65	66.3
2	22	20.2
3	3	4.1
4	1	0.6

表 1 年間に何人が馬に蹴られて死ぬか (1 軍団あたり)

例 1.3 (やつらの技術はどこまで進んでいるか?)

次の表 2 は第 2 次世界大戦中、ドイツが V2 ロケットでロンドンを空襲した時の結果である。イギリスはこのドイツの新兵器の命中精度がどのくらい

¹この質問は私がある新聞社から実際に聞かれました。神戸で起こった事です。神戸版に載せる程珍しい事でしょうか？

²合計 200 の軍団を 1 年間調べたと考える

ものか判定をつけかねていた．重要な建物に数発の命中があったと思うと何も無いところにも数発集中して落ちていたりして，まだ精度はそれほどでないだろうとは思いますが，それでも狙って発射しているのかどうかを知りたかった．そこでロンドンを $500m$ 四方の正方形で区切って行って，それぞれの正方形に何発の命中があったかのデータをとった．そのデータが表2である³．理論値はパラメータ 0.9323 のポアソン分布．

命中数	ブロック数	理論値
0	229	226.7
1	211	211.4
2	93	98.5
3	35	30.6
4	7	7.1
5	1	1.6

表2 命中が集中しているブロックの数

例 1.4 (超新星が生まれたのか?)

カウント数	インターバル数	理論値
0	1042	1064
1	860	823
2	307	318
3	78	82
4	15	16
5	3	2
6	0	0.3
7	0	0.03
8	0	0.003
9	1	0.0003

表3 10秒間に何個中性子をカウントしたか

³W.Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications* より抜粋

前ページの表は 1987 年 2 月 23 日の *Irvine-Michigan-Broockhaven* 実験で各 10 秒間に観測された中性子線の数に関するデータである．理論値はパラメータ 0.77 のポアソン分布⁴．

例 1.5 (お見合い問題：秘書探し)

アメリカである人が秘書を公募した．応募したのが 30 人いた．一人ずつ面接し，その場で採用不採用を決定する⁵．このとき，ベストの人を選ぶ良い方法はあるのだろうか？良い方法の基準はどう考えたら良いだろうか？

例 1.6 (悪魔の選択)

これも有名な問題．バリエーションはいろいろあるが，あるクイズ番組の最後に，司会者がクイズ優勝者を 3 つの閉じたドアの前に連れていき，

「この 3 つのドアの一つを開けると，豪華な高級自動車が当たります．他の二つのドアには「山羊」⁶が待っています」

と説明する．

「心は決まりましたか？」

と聞いた後，優勝者に一つのドアを選ばせる．そのあとで，司会者は残った方の一つのドアを開けてみせる⁷そこには山羊がいる．

「これは外れですね」

「さて，もう一度あなたにチャンスを与えます．ドアを選び直しても良いですよ」

このあと優勝者の *FINAL ANSWER*

ドアを変えたが得か，変えない方が得か，どっちが得なのだろう？

合理的な説明はないものか？⁸

⁴R.J.Barlow, *Statistics, A Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences* より抜粋

⁵お見合いのようですね．お見合いして「他にお見合いを 3 人程するので待って下さい」というのは日本ではあまりやりません

⁶なぜ山羊なんだろう？

⁷司会者は高級自動車がどのドアの後ろにあるか知っています．

⁸R. Isaac, *Pleasures of Probability* から抜粋

例 1.7 (サイコロ)

なぜ、サイコロを投げると、出る目の予測がこれほどつきにくいのだろうか⁹?
なぜサイコロは確率の講義のモデルとしてこれほど良く使われるのだろうか?

例 1.8 (酔っ払いは無事に家に帰ることができるか?)

バーでしたたか飲んだ酔っ払いが家に帰る時間になった。

道は一本道であるが、家と反対側の方向には深い池がある。酔っ払いは方向が全くわからなくなっており、ときおり立ち止まっては辺りを見回すが、どちらを向いているかまるっきりわからない。

でたために進む方向を決めて歩き出しては立ち止まりまた辺りを見回すことを繰り返している。

この酔っ払いが池に落ちて溺れずに無事に家に帰る確率はどのくらいだろうか?

例 1.9 (Polya の壺)

壺に赤玉と黒玉が 1 個ずつ入っている。中を見ずに 1 個の玉を取り出し、取り出した玉と同じ色の玉を 1 個加えて壺に戻す。これからこの操作を n 回繰り返すとき、 n 回目に赤玉を取り出す確率はいくらになるだろうか?

⁹もちろん、そっとおくのは禁止。映画では 5 個くらいのサイコロの目をそろえるなんて良くやってるけど、ほんとにそんなことができる人がいるのかな?これは手品の領域になると思うね。