3.2 大数の法則

ここでは大数の弱法則と強法則を紹介する

3.2.1 大数の弱法則 (The Weak Laws of Large Numbers)

定理 3.2 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ を独立で，分布がすべて同じ確率変数の列とする．今，$EX_1 = m, V(X_1) = \sigma^2 < \infty$ ならば，

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n$$

とおくとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} P\big(|\frac{1}{n}S_n - m| > \varepsilon\big) = 0 \tag{3.6}$$

証明　チェビシェフの不等式から

$$P(|S_n - nm| > n\varepsilon) \leq \frac{E\big[|S_n - nm|^2\big]}{n^2\varepsilon^2} = \frac{V(S_n)}{n^2\varepsilon^2} \tag{3.7}$$

$\{X_n\}$ が独立なので，

$$V(S_n) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} E[(X_j - m)(X_k - m)] = \sum_{j=1}^{n} V(X_j) = n\sigma^2$$

これを (3.7) に代入して，

$$P(|\frac{1}{n}S_n - m| > \varepsilon) = P(|S_n - nm| > n\varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

$n \to \infty$ のとき，右辺は 0 に収束する． □

任意の $\varepsilon > 0$ に対して (3.6) が成り立つとき S_n/n は m に**確率収束**すると言う．大数の弱法則は S_n/n が m に確率収束する事を主張する．独立同分布な確率変数列に対しては定理 3.2 よりも条件を緩やかにして， X_1 が可積分であれば良いことまで知られている．

3.2.2 大数の強法則 (the Strong Law of Large numbers)

大数の弱法則の主張は**相対的な頻度は真の確率に近づいていく**という直観的な主張に比べると間接的であり，もどかしい感じがする．もっと直接にこの主張を数学的に証明することはできないかというのがここでのテーマである．

定義 3.2 期待値 0 の確率変数列 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して**大数の強法則**が成り立つとは，

$$\frac{S_n}{n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to 0 \quad (n \to \infty) \qquad a.s. \tag{3.8}$$

が成り立つことを言う．X_n の期待値が 0 でないときは $\tilde{X}_n = X_n - E(X_n)$ に対して大数の強法則が成り立つときに言う．特に，$EX_n = m$（一定）のときはこれは

$$\frac{S_n}{n} \to m \quad (n \to \infty) \qquad a.s. \tag{3.9}$$

と同値である．

定理 3.3 (i) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が独立な確率変数列で，期待値 0, 分散 $\sigma_n^2 < \infty$ とし，さらに

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty \tag{3.10}$$

となるならば，$\{X_n\}$ に対して大数の強法則が成立する．

(ii) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が独立で同分布を持ち，可積分，$EX_1 = m$ とすると $\{X_n\}$ に対して大数の強法則 (3.9) が成立する．

証明の前に補題を二つ準備する．

補題 3.4 (Kronecker の補題) $\{a_n\}$ を正の数列とし，$A_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ と置く．$n \to \infty$ のとき $A_n \to \infty$ とする．数列 $\{x_n\}$ が

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{A_j} \quad \text{は収束する} \tag{3.11}$$

という条件を満たすならば，

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{A_n} = 0$$

となる．

証明 無限和が収束しているので，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $N \geq 1$ がとれて $n \geq N, m \geq 1$ のとき常に

$$\left| \sum_{j=n+1}^{n+m} \frac{x_j}{A_j} \right| < \varepsilon$$

とできる．このとき

$$\left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{N} x_j + \sum_{j=N+1}^{n} A_j \frac{x_j}{A_j}\right| \le \left|\sum_{j=1}^{N} x_j\right| + \left|\sum_{j=N+1}^{n} \sum_{p=1}^{j} a_p \frac{x_j}{A_j}\right|$$
$$= \left|\sum_{j=1}^{N} x_j\right| + \left|\sum_{p=1}^{n} \sum_{j=\max\{p,N+1\}}^{n} a_p \frac{x_j}{A_j}\right| \le \left|\sum_{j=1}^{N} x_j\right| + \varepsilon A_n$$

両辺を A_n で割って $n \to \infty$ として $\varepsilon > 0$ が任意であることより

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + \ldots + x_n}{A_n} = 0$$

が分かる．

補題 3.5 (Kolmogorov の不等式) $n \geq 1$ とする．$\{Y_j\}_{j=1}^{n}$ は独立な確率変数で，

$$EY_j = 0,\ E(Y_j^2) < \infty, \qquad 1 \le j \le n$$

とする．この時，任意の $\lambda > 0$ と $S_k = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k$ に対して

$$P\left(\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge \lambda\right) \le \frac{ES_n^2}{\lambda^2}$$

証明　最初に独立の定義から n 変数と m 変数の有界可測関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ と $g(y_1, \ldots, y_m)$ に対して

$$E\left[f(X_1, \ldots, X_n) g(X_{n+1}, \ldots, X_{n+m})\right] = E\left[f(X_1, \ldots, X_n)\right] E\left[g(X_{n+1}, \ldots, X_{n+m})\right]$$

となることに注意する．いま，

$$A = \{\omega \in \Omega; \max_{1\le k\le n} |S_k(\omega)| \ge \lambda\} = \{\max_{1\le k\le n} |S_k| \ge \lambda\}$$

とおくとき

$$ES_n^2 \ge E\left[S_n^2 1_A\right].$$

A をさらに分解して

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} \{|S_j| < \lambda \text{ if } j < k, |S_k| \ge \lambda\} = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

と書こう．A_k は $X_1, \ldots, X_k$ だけで決まるので，$X_{k+1}, \ldots, X_n$ とは独立なので，

$$E\left[S_n^2 1_{A_k}\right] = E\left[(S_k + (S_n - S_k))^2 1_{A_k}\right] = E\left[S_k^2 1_{A_k}\right] + P(A_k)E(S_n - S_k)^2 \geq \lambda^2 P(A_k)$$

これを k について足すと

$$E\left[S_n^2 1_A\right] \geq \lambda^2 P(A)$$

左辺は $E[S_n^2]$ よりも大きくないので，求める不等式が得られた． □

練習問題 3.2 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は独立で各 $n \geq 1$ について X_n はパラメータ $n^{-1/4}$ のポアソン分布に従うとき，大数の強法則を使って確率 1 で

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \longrightarrow 0 \tag{3.12}$$

を示したい．各 X_n の平均と分散を求め，$Y_n = X_n - E(X_n)$ について定理 3.3 が成り立つことを確かめよ．$X_n = Y_n + E(X_n)$ だから上の式 (3.12) が成り立つことを確かめよ．