定理 3.3 (i) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が独立な確率変数列で，期待値 0, 分散 $\sigma_n^2 < \infty$ とし，さらに

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty \tag{3.10}$$

となるならば，$\{X_n\}$ に対して大数の強法則が成立する．

(ii) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ が独立で同分布を持ち，可積分，$EX_1 = m$ とすると $\{X_n\}$ に対して大数の強法則が成立する．

補題 3.4 (Kronecker の補題) $\{a_n\}$ を正の数列とし，$A_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$ と置く．$n \to \infty$ のとき $A_n \to \infty$ とする．数列 $\{x_n\}$ が

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{A_j} \quad \text{は収束する} \tag{3.11}$$

という条件を満たすならば，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{A_n} = 0$$

となる．

補題 3.5 (Kolmogorov の不等式) $n \geq 1$ とする．$\{Y_j\}_{j=1}^{n}$ は独立な確率変数で，

$$EY_j = 0,\, E(Y_j^2) < \infty, \qquad 1 \leq j \leq n$$

とする．この時，任意の $\lambda > 0$ と $S_k = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_k$ に対して

$$P\left(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq \lambda\right) \leq \frac{ES_n^2}{\lambda^2}$$

定理 3.2 の証明 (i) の証明: Kronecker の補題により，確率 1 で $\sum_{n\geq 1} X_n/n$ が収束することを示せばよい．これを言うために，$0 < \gamma < 1/2$ を任意に取り，部分列 $\{n_k\}$ を

$$\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{j^2}{\sigma_j^2} < 2^{-k}$$

となるように定める．これは条件 (3.13) から $\sum_n \sigma_n^2/n^2$ が収束しているので可能．$k \geq 1$ に対して Kolmogorov の不等式により，$Y_j = \frac{X_{n_k+j}}{n_k+j}$ および

$n = n_{k+1} - n_k$, $\lambda = 2^{-\gamma k}$ とおくと

$$\begin{aligned} & P\left(\max_{1 \le j \le n_{k+1}-n_k} |Y_1 + \ldots + Y_j| \ge 2^{-\gamma k}\right) \\ & \le 2^{2\gamma k} E(Y_1^2 + \ldots + Y_{n_{k+1}-n_k}^2) \\ & = 2^{2\gamma k} \sum_{p=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{\sigma_p^2}{p^2} < 2^{-(1-2\gamma)k}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

最後の不等式は n_k の決め方から得られる．$\gamma < 1/2$ だったので，(3.15) に Y_j の定義式を代入し，k について加えて

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left(\max_{1 \le j \le n_{k+1}-n_k} |\frac{X_{n_k+1}}{n_k+1} + \ldots + \frac{X_{n_k+j}}{n_k+j}| \ge 2^{-\gamma k}\right) < \infty. \tag{3.13}$$

Borel-Cantelli の第一補題からこのとき

$$P\left(\bigcap_{K=1}^{\infty} \bigcup_{k=K}^{\infty} \{\max_{1 \le j \le n_{k+1}-n_k} |\frac{X_{n_k+1}}{n_k+1} + \ldots + \frac{X_n k+j}{n_k+j}| \ge 2^{-\gamma k}\}\right) = 0$$

つまり，この補集合の確率が 1 になる．これは確率 1 である K_0 がとれて，$k \ge K_0$ ならば常に

$$\max_{1 \le j \le n_{k+1}-n_k} |\frac{X_{n_k+1}}{n_k+1} + \ldots + \frac{X_{n_k+j}}{n_k+j}| < 2^{-\gamma k}$$

となっているので，$\sum_n X_n/n$ が確率 1 で収束することが分かる．
(ii) $m = 0$ としておいてよい．$\tilde{X}_n$ を

$$\tilde{X}_n := \begin{cases} X_n & |X_n| \le n \text{ のとき} \\ 0 & \text{のとき} \end{cases}$$

とおくと，$E|\tilde{X}_n| \le E|X_1| < \infty$ で，$\hat{X}_n = \tilde{X}_n - E\tilde{X}_n$ と期待値を 0 にして

おく．このとき

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\hat{X}_n)^2}{n^2} &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(\tilde{X}_n)^2}{n^2} \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{n^2} P(j-1 \leq |X_1| \leq j) \quad \because \text{同分布} \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} j^2 P(j-1 \leq |X_1| \leq j) \sum_{n=j}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
&\leq C \sum_{j=1}^{\infty} j P(j-1 \leq |X_1| \leq j) = CE|X_1| < \infty
\end{aligned}
$$

なので，(i) から確率 1 で

$$
\frac{\hat{X}_1 + \ldots + \hat{X}_n}{n} \to 0
$$

ところで X_1 が可積分で $EX_1 = 0$ なので，

$$
\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} E\tilde{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(EX_1 - E(X_1 1_{\{|X_1| \geq j\}}) \right) \to EX_1 = 0
$$

となり，上の二つの式から a.s. で

$$
\frac{\tilde{X}_1 + \ldots + \tilde{X}_n}{n} \to 0 \tag{3.14}
$$

が分かる．最後に，

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} P(X_n \neq \tilde{X}_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P(|X_1| \geq n) \leq CE|X_1| < \infty
\end{aligned}
$$

なので，再び Borel-Cantelli の第一補題により a.s. である番号 N が見つかり， $n \geq N$ ならば $\tilde{X}_n = X_n$ となり，(3.17) より

$$
\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \to 0
$$

□