1.4　期待値と分散

1.4.1　期待値

(Ω, P) を離散確率空間，X をその上の確率変数とする．Ω がたかだか可算個なので，X のとりうる値もたかだか可算個となる．X のとり得る値の全体の集合を

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

と書き，X の分布を P_X と書くと，

$$P_X(a_j) = P(X = a_j) \qquad j = 1, 2, \ldots$$

が成り立つ．分布が分かると，期待値や分散といった様々な平均量を考えることができる．まず期待値から定義しよう．

定義 1.3 X を離散確率変数で $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ に値をとり，その分布を P_X と書くと，X の**期待値** EX は $\mathcal{A}$ が有限のとき

$$EX = \sum_{a \in \mathcal{A}} P(X = a) \tag{1.1}$$

で定義する．これは分布 P_X の期待値とも呼ばれる．$\mathcal{A}$ が無限集合のときは，まず X が非負の値しか取らないときは (1.1) 式で定義する．一般の場合は X^+, X^- をそれぞれ

$$X^+(\omega) := \max\{X(\omega), 0\}, \quad X^-(\omega) = \max\{-X(\omega), 0\}$$

と定義すると X^+, X^- はどちらも非負の値しか取らないので，$E(X^+), E(X^-)$ が定まる．この二つが有限値のとき X は **可積分**といい，

$$E(X) = E(X^+) - E(X^-) \tag{1.2}$$

と定義する．$E(X^+), E(X^-)$ のどちらかが有限ならば上式 (1.2) は意味を持ち，このとき X は**積分確定**といい，(1.2) で $E(X)$ を定義する．

期待値は平均とも呼ばれる．いくつかの分布で期待値を求めてみよう．

例 1.10 X は　$\{1, 2, \ldots, n\}$ 上の一様分布 $\mathrm{Unif}\{1, 2, \ldots, n\}$ にしたがう確率変数のとき

$$E(X) = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \cdots + \frac{n}{n} = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n} = \frac{n+1}{2}$$

例 1.11 X は成功の確率 p の *2* 項分布 $B(n,p)$ にしたがう確率変数のとき

$$
\begin{aligned}
EX &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= np \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} p^j (1-p)^{n-1-j} \quad (j = k-1) \\
&= np(1-p+p)^{n-1} = np
\end{aligned}
$$

成功の確率 p の独立[1]な試行を n 回繰り返すのだから平均の成功回数は np になるのは不思議ではない.

例 1.12 X がパラメータ λ のポアソン分布に従うとき，期待値 EX は

$$
EX = \sum_{k=0}^{\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda e^{\lambda} e^{-\lambda} = \lambda
$$

となる.

例 1.13 X が成功の確率 p の幾何分布に従うとき、期待値 EX は

$$
EX = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-p)^k p = (1-p)p \sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}.
$$

これは

$$
\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}
$$

を x で微分すると

$$
\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}
$$

だから，$x = 1-p$ を代入することにより

$$
EX = \sum_{k=0}^{\infty} k(1-k)^k p = (1-p)p\frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p}
$$

[1]独立の数学的な定義は後で詳しく考える

注意 1.1 成功の確率 p の試行を続けて，初めて成功した時の試行数を Y とすると，$Y-1$ は成功の確率 p の幾何分布．従って，

$$EY = 1 + E(Y-1) = 1 + \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p}$$

Y の分布は *first succes* 分布ともいう．

例 1.14 X を負の 2 項分布 $NB(n,p)$ に従うとすると

$$\begin{aligned}
EX &= \sum_{k=0}^{\infty} k \binom{n+k-1}{k} (1-p)^k p^n \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!(k-1)!} (1-p)^k p^n \\
&= n(1-p) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(n+j)!}{n!j!} (1-p)^j p^n \\
&= n\frac{(1-p)}{p} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n+1+j-1}{j} (1-p)^j p^{n+1} \\
&= n\frac{1-p}{p}
\end{aligned}$$

これは幾何分布の平均の n 倍．

1.4.2 分散

期待値が確率変数の値域の中心を示す量であるのに対し，分散は X の値の散らばり方を示す指標となる．

定義 1.4 X を離散確率変数として，その値域を $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$ とするとき，X が可積分のとき，X の分散 $V(X)$ は

$$V(X) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - EX)^2 P(X = a_k)$$

で与えられる．

右辺は $E(X^2)-(EX)^2$ と等しい．実際，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k-EX)^2P(X=a_k)&=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2-2a_kEX+EX^2)P(X=a_k)\\&=\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2P(X=a_k)-2EX\sum_{k=1}^{\infty}a_kP(X=a_k)+(EX)^2\\&=E(X^2)-2(EX)(EX)+(EX)^2=E(X^2)-(EX)^2.\end{aligned}$$

これまでの例について分散を求めてみよう．

練習問題 1.6 X が $\{1,2,\dots,n\}$ の一様分布のとき，分散 $V(X)$ を求めよ．

例 1.15 X がパラメータ λ のポアソン分布に従うとき，$V(X)$ を求める．

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\sum_{k=0}^{\infty}k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=0}^{\infty}(k(k-1)+k)\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\\&=\lambda^2\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\lambda^j}{j!}e^{-\lambda}+EX=\lambda^2+\lambda\end{aligned}$$

なので，

$$V(X)=E(X^2)-(EX)^2=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

例 1.16 X が成功の確率 p の幾何分布 $Ge(p)$ に従うとき，

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\sum_{k=0}^{\infty}k^2(1-p)^kp=\sum_{k=0}^{\infty}(k(k-1)+k)(1-p)^kp\\&=\frac{2(1-p)^2p}{(1-(1-p))^3}+\frac{1-p}{p}=\frac{2(1-p)^2}{p^2}+\frac{1-p}{p}\end{aligned}$$

したがって

$$V(X)=E(X^2)-(EX)^2=\frac{(1-p)^2}{p^2}+\frac{1-p}{p}=\frac{1-p}{p^2}$$

練習問題 1.7 X が負の 2 項分布 $NB(n,p)$ に従うときの分散 $V(X)$ を求めよ．使うのは次の式

$$\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}a^kb^n=(a+b)^{-n}.$$

練習問題 1.8 (難) Coupon Collecter's problem ガムやキャラメルに何種類かのカードをつけて，コレクターを誘う商売は昔からある．今，10 種類のカードのどれかがランダムに (同じ確率で）入っているガムが売っているとする．10 種類のカードを集めるまでに平均何個のガムを買わないといけないことになるか？

ヒント 最初の一枚は明らかにガムを 1 個買うと手に入る．このカードと違うカードを手に入れるためには，成功の確率 $\frac{9}{10}$ の試行を成功するまで続けなければならない．