

2.3 確率変数の期待値

離散な場合には簡単に定義できた期待値だが、確率変数が連続的な値をとる場合の期待値も含めて一般に定義しておく。

(Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とする。 X をこの上で定義された確率変数とする。

X がたかだか有限個の値 $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ しか取らないときは今までの定義をそのまま使う。

$$EX = \sum_{j=1}^m a_j P(X = a_j)$$

X が連続な値を取るときは、上の定義をうまく使いながら期待値を定義したい。

Case 1. $X \geq 0$ のとき

$n \geq 1$ に対し、新しい確率変数 X_n を

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{if } \frac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k+1}{2^n} \quad k = 0, 1, 2, \dots, n2^n - 1 \\ 0 & \text{if } X(\omega) \geq n \end{cases}$$

と定義する。作り方から $X_n \nearrow X$ で、 X_n はたかだか有限個の値しか取らない。そこで

$$EX = \lim_{n \rightarrow \infty} EX_n$$

と定義する。

$$EX_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^n} P\left(\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n}\right).$$

もともと $X \geq 0$ が有限個の値 a_1, a_2, \dots, a_m しか取らないとき、 n が十分大きければ a_j 達は $\frac{k}{2^n}$ と $\frac{k+1}{2^n}$ の間にはたかだか一つしか無いようにできる。このとき、 $\frac{k}{2^n} \leq a_j < \frac{k+1}{2^n}$ となる a_j がある時は

$$\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n} \iff X = a_j$$

だから

$$P\left(\frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n}\right) = P(X = a_j)$$

この様な a_j がない k では

$$\left\{ \omega \in \Omega; \frac{k}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{k+1}{2^n} \right\} = \emptyset$$

となるので, k について加えると, このとき

$$EX_n = \sum_{j=1}^m \frac{[2^n a_j]}{2^n} P(X = a_j)$$

となる. ただし $[x]$ はガウスの記号で x を越えない最大の整数を表す. $n \rightarrow \infty$ のときこの値は

$$\sum_{j=1}^m a_j P(X = a_j)$$

に近づく. 従って, $X \geq 0$ で, X が有限個の値しか取らないとき, この定義は元の定義の拡張になっている.

Case 2. 一般の場合

X が一般の確率変数のとき,

$$X^+(\omega) = \max\{X(\omega), 0\}, \quad X^-(\omega) = \max\{-X(\omega), 0\}$$

とおくと X^+, X^- は非負の確率変数で

$$X(\omega) = X^+(\omega) - X^-(\omega)$$

なので, EX^+, EX^- がともに有限ならば X は可積分と言い,

$$EX = EX^+ - EX^-$$

と定める. X が有限個の値しか取らないとき, この定義による $E(X)$ と最初の定義による $E(X)$ は同じものを与える. (各自確かめてみよ.)

注意 2.5 ルベグ積分を知っている人は, 期待値の定義が積分の定義に似ていることに気がついたかもしれない. 実際その通りで, 以下に述べるようなルベグ積分の諸定理がそのまま成り立つことが知られている. 証明のやり方もほとんど同じである. X の分布が密度関数 $f(x)$ をもつ場合にこの定義から

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

となることも同時に分かる.

定理 2.6 期待値 EX は次を満たす.

(1) X, Y が可積分確率変数で, $a, b \in \mathbb{R}$ ならば

$$E(aX + bY) = aEX + bEY$$

(2) $X \geq 0$ なら $EX \geq 0$.

(3) (単調収束定理) $X_n \geq 0$ が任意の $\omega \in \Omega$ に対して $X_1(\omega) \leq X_2(\omega) \leq \dots \leq X_n(\omega) \rightarrow X_\infty(\omega)$ を満たすならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = EX_\infty$$

(4) (Fatou の補題) $X_n \geq 0$ ならば

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} EX_n \geq E\left(\liminf_{n \rightarrow \infty} X_n\right)$$

(5) (Lebesgue の収束定理) $X_n \rightarrow X_\infty$ が確率 1 で成り立ち, ある可積分確率変数 $Z \geq 0$ に対して任意の $n \geq 1$ で $P(|X_n| \leq Z) = 1$ となるとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} EX_n = EX_\infty$$

この定理の証明は省略する. ルベグ積分または確率論の教科書には載っている.

定理 2.7 (チェビシエフ [Tchebyshev] の不等式)

$f(x)$ が非負単調非減少なとき, 確率変数 X について $f(X)$ が可積分ならば,

$$P(X \geq \lambda) \leq \frac{E[f(X)]}{f(\lambda)} \quad (2.3)$$

が任意の $f(\lambda) > 0$ となる λ に対して成立する.

証明 $X(\omega) \geq \lambda$ のとき, $f(X(\omega)) \geq f(\lambda) > 0$ なので,

$$\frac{f(X(\omega))}{f(\lambda)} \geq 1$$

であり, この期待値を $\{X \geq \lambda\}$ 上で取ることにより,

$$E\left[\frac{f(X)}{f(\lambda)}\right] \geq E\left[\frac{f(X)}{f(\lambda)} 1_{\{X \geq \lambda\}}\right] \geq P(X \geq \lambda)$$

最初の不等式は f が非負なことから出る．期待値の線形性からこの式は (2.3) と同じ． \square

よく使うのは $p > 0$ として $f(x) = x^p 1_{[0, \infty)}(x)$ に対して

$$P(|X| \geq \lambda) \leq \frac{Ef(|X|)}{f(\lambda)} = \frac{E(|X|^p)}{\lambda^p}$$

という形の不等式である．

練習問題 2.5 X を 2 乗可積分 (つまり X^2 が可積分) とし, $EX = m$ とするとき, $a > 0$ に対して

$$P(X \geq m + a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

を証明せよ．

ヒント $Y = X - m$ についてチェビシエフの不等式を使う．

練習問題 2.6 (i) 命題 (P) が確率 1 で成り立つことを $(P), a.s.$ と書く．確率変数 X について $X = 0, a.s.$ のとき期待値の定義に従って $E(X) = 0$ を証明せよ．

(ii) これを使って二つの可積分な確率変数 X, Y について, $X = Y, a.s.$ のとき $E(X) = E(Y)$ を証明せよ．