

定理 2.8 (Hölder の不等式) $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ とし, $|X|^p, |Y|^q$ がともに可積分とすると,

$$|E(XY)| \leq (E(|X|^p))^{\frac{1}{p}} (E(|Y|^q))^{\frac{1}{q}}$$

とくに $p = 2$ のとき $q = 2$ となり、この式は Cauchy-Schwarz の不等式と呼ばれている。

証明は、ルベグ積分の本に書いてあるのと同じなので省略する。

2.4 分布関数

分布というものはまだ関数に比べて分かりにくいような気がする。そこで、関数の言葉で分布を語ることを考える。

定義 2.5 確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上で定義された確率変数 X に対してその分布関数 $F_X(t)$ を

$$F_X(t) := \mu_X((-\infty, t]) = P(X \leq t) \quad (2.4)$$

によって定義する。

命題 2.9 確率変数 X の分布関数 $F_X(t)$ は以下の性質を持つ。

- (i) $F_X(t)$ は $t \in \mathbf{R}$ について単調非減少。
- (ii) $F_X(t)$ は $t \in \mathbf{R}$ について右連続。
- (iii) $\lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) = 1$

証明 (i) $s < t$ のとき $F_X(s) \leq F_X(t)$ を言えばよい。明らかに、
 $\{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq s\} \subset \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq t\}$ だから、

$$F_X(s) = P(X \leq s) \leq P(X \leq t) = F_X(t)$$

(ii) $t_n \searrow t$ のとき $F_X(t_n) \rightarrow F_X(t)$ を言えばよい。このとき $X^{-1}((-\infty, t_n]) = \{\omega \in \Omega; X(\omega) \leq t_n\}$ は n について単調に減少して、

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}((-\infty, t_n]) = X^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} (-\infty, t_n]\right) = X^{-1}((-\infty, t])$$

なので，確率の連続性から

$$F_X(t) = P(X \leq t) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \{X \leq t_n\}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(X \leq t_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_X(t_n)$$

(iii) 上と同じように考えると，

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} F_X(t) &= P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}((-\infty, -n])\right) = P(X^{-1}(\emptyset)) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} F_X(t) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X^{-1}((-\infty, n])\right) = P(X^{-1}(\mathbf{R})) = 1 \end{aligned}$$

例 2.1 $\mu(\{0\}) = 1$ のとき， $\mu(A) = 1 \Leftrightarrow A \ni 0$ という分布が得られる．この μ を δ_0 とかき， $\{0\}$ に集中する質量をもつディラック (Dirac) 分布という．この分布関数は

$$F(t) = \begin{cases} 0 & t < 0; \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

となる．

例 2.2 サイコロの目の分布は

$$\mu(\{i\}) = \frac{1}{6}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

で与えられる．この分布関数を求めてみよう． $t < 1$ のとき、

$$F(t) = \mu((-\infty, t]) = P(\text{目の数が } t \text{ 以下}) = 0$$

$1 \leq t < 2$ のとき

$$F(t) = \mu((-\infty, t] \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \mu(\{1\}) = \frac{1}{6}$$

$2 \leq t < 3$ のとき

$$F(t) = \mu((-\infty, t] \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \mu(\{1, 2\}) = \frac{1}{3}$$

$3 \leq t < 4$ のとき

$$F(t) = \mu((-\infty, t] \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \mu(\{1, 2, 3\}) = \frac{1}{2}$$

$4 \leq t < 5$ のとき

$$F(t) = \mu((-\infty, t] \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \mu(\{1, 2, 3, 4\}) = \frac{2}{3}$$

$5 \leq t < 6$ のとき

$$F(t) = \mu((-\infty, t] \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \mu(\{1, 2, 3, 4, 5\}) = \frac{5}{6}$$

$6 \leq t$ のとき

$$F(t) = \mu((-\infty, t] \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \mu(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = 1$$

つまり、 $F(x)$ は $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ の各点で $\frac{1}{6}$ ずつジャンプする右連続な階段関数になる。

これは次のようにも考えられる。サイコロの目の分布は 1 から 6 までの 6 個の自然数に $\frac{1}{6}$ ずつの重みを持つ分布であるから、この分布を μ とすると

$$\mu(A) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \delta_i(A)$$

と書くことができる。ただし、 δ_i は i に集中する重みを持つディラック分布。これより分布関数は

$$F(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 \delta_i((-\infty, t]) = \frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 F_i(t)$$

ただし、 $F_i(t)$ はディラック分布 δ_i の分布関数で、 $t = i$ で 0 から 1 へジャンプする。この関数 $F(t)$ が上のような形であることは明らかだろう。

例 2.3 $a > 0$ に対して μ が次で与えられるとき、パラメータ a のコーシー (Cauchy) 分布という。 $A \in \mathcal{B}$ のとき、

$$\mu(A) = \frac{a}{\pi} \int_A \frac{1}{a^2 + x^2} dx$$

この分布関数は

$$F(t) = \frac{1}{\pi} \left[\text{Arctan} \frac{t}{a} + \frac{\pi}{2} \right]$$

例 2.4 標準正規分布 $N(0, 1)$ の分布関数は

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-x^2/2} dx$$

となる。これ以上簡単な形にはならない。ときに右辺は $\Phi(t)$ とか $N(t)$ などと書かれる事がある。

例 2.5 パラメータ $\lambda > 0$ の指数分布の分布関数は

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda t}$$

である .

練習問題 2.7 次の分布の分布関数を求めよ .

(i) 区間 $[a, b]$ 上の一様分布は

$$\mu(A) = \frac{1}{b-a} \int_{A \cap [a,b]} dx$$

である .

(ii) 2項分布 $B(3, 0.5)$.

(iii) パラメータ 1 のポアソン分布

補遺 実は命題 2.9 の逆が言える。つまり、右連続な単調非減少関数 F が

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} F(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t) = 1$$

を満たすとき、ある $(\mathbf{R}, \mathcal{B})$ 上の確率 μ_F が唯一つ存在して

$$\mu_F((-\infty, t]) = F(t) \quad \forall t \in \mathbf{R}$$

が成り立つことが知られている。すこし説明しよう。

言葉の準備がある。いつものように Ω を勝手な集合 ($\neq \emptyset$) とするとき、 Ω の部分集合の族 \mathcal{A} が Ω の加法族であるとは、

- (i) $\Omega \in \mathcal{A}$,
- (ii) $A \in \mathcal{A}$ ならば $A^c \in \mathcal{A}$
- (iii) $A, B \in \mathcal{A}$ ならば $A \cup B \in \mathcal{A}$

の 3 つが成り立つときに言う。 Ω の σ -加法族は Ω の加法族になるが、逆は正しくない。

例 2.6

$$\mathcal{C} := \{(a, b]; -\infty \leq a < b < \infty\} \cup \{(a, \infty); -\infty < a < \infty\} \cup \{\emptyset\}$$

とし、

$$\mathcal{A} := \{A_1 \cup \dots \cup A_n; \{A_j\}_{j=1}^n \text{ は排反}, A_1, \dots, A_n \in \mathcal{C}\}$$

は \mathbf{R} の加法族である。 \mathcal{B} は $\mathcal{C}_1 = \{(-\infty, a]; a \in \mathbf{R}\}$ を含む最小の σ -加法族であることが知られており、また $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ も知られている¹。だから、 $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{B}$ となるが、 \mathcal{C} 自身には $\bigcup_{n=1}^{\infty} (2n, 2n+1]$ というボレル集合は含まれていない。

定理 2.10 (カラテオドリの拡張定理²)

Ω の加法族 \mathcal{A} 上で定義された集合関数 Q が次の条件を満たすものとする。

- (i) $0 \leq Q(A) \leq 1 \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad Q(\Omega) = 1$
- (ii) $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ が排反ならば

$$Q(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n Q(A_k)$$

- (iii) $\{A_n\} \in \mathcal{A}$ が $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ かつ $\bigcap_{n \geq 1} A_n = \emptyset$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(A_n) = 0$$

このとき、 $\sigma(\mathcal{A})$ 上に唯一つの確率 Q^* がとれて、

$$Q^*(A) = Q(A) \quad \forall A \in \mathcal{A} \tag{2.5}$$

が成り立つ。

F から例 2.6 の \mathcal{A} 上に Q を作ってみる。 $A = [a_1, b_1) \cup [a_2, b_2) \cup \dots \cup [a_n, b_n) \in \mathcal{A}$ とする。 $[a_i, b_i)$ たちは排反である。このとき、

$$Q(A) := \sum_{i=1}^n [F(b_i) - F(a_i)]$$

¹証明は難しくはないので、気になる人は証明をしてみるとよい。

²証明については、西尾真喜子著「確率論」2章 §3 参照

と定める． $Q(\mathbf{R}) = 1, Q(\emptyset) = 0$ である．上の条件 (i), (ii) はすぐに分かる．(iii) が面倒だが，対偶を示す． $A_1 \supset A_2 \supset \dots$ を A の要素で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(A_n) = \alpha > 0$$

として $\cap A_n \neq \emptyset$ をいう．

各 n について，

$$A_n = (a_1, b_1] \cup \dots \cup (a_k, b_k] \quad \text{各区間は排反}$$

の形に書ける³．作り方から

$$Q(A_n) = \sum_{i=1}^k (F(b_i) - F(a_i))$$

で， F の右連続性から，各 i について $a_i < a'_i < b_i$ となる a'_i を十分 a_i に近づけると

$$F(a'_i) - F(a_i) < \frac{1}{k} 2^{-n-1} \alpha$$

とできる．このとき， $A'_n = (a'_1, b_1] \cup \dots \cup (a'_k, b_k]$ とおくと，これは排反な区間の和で， $Q(A_n \setminus A'_n) \leq 2^{-n-1} \alpha$ となっている．これから

$$\begin{aligned} Q(A'_1 \cap \dots \cap A'_n) &= Q(A_n \setminus \{(A_1 \setminus A'_1) \cup \dots \cup (A_n \setminus A'_n)\}) \\ &\geq Q(A_n) - \sum_{i=1}^n Q(A_i \setminus A'_i) \\ &\geq (1 - 2^{-2} - 2^{-3} - \dots - 2^{-n-1}) \alpha \geq \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

何が言いたいかというと、これは $A'_1 \cap \dots \cap A'_n \neq \emptyset$ を意味している。 A'_n の各半開区間 $(a'_i, b_i]$ を $[a'_i, b_i]$ としたものを A_n^* と書く． $A_n^* \supset A'_n$ だから $A_1^* \cap \dots \cap A_n^*$ も空集合でない．しかもこの集合は A_1 に含まれる閉集合なのでコンパクト性から

$$A_1^* \cap A_2^* \cap \dots \neq \emptyset \quad (2.6)$$

これは $\cap A_n$ に含まれるので， $\cap A_n \neq \emptyset$ ．

³ 正確にはこれらの半開区間は n ごとに違っていると考える方が自然なので， $a_1 = a_1^{(n)}, b_1 = b_1^{(n)}, \dots, k = k(n)$ などと書くべきだが，記号が繁雑になるので，このように書いておこう．