第3章　独立確率変数列の極限定理

3.1　独立性の定義

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を固定しておく．Ω は十分大きいとしておく．この上でたくさんの確率変数を考えたとき，それらが独立であると都合が良いことがある．まず，確率変数が独立であるということを定義しよう．

定義 3.1 二つの確率変数 X, Y が**独立**とは，任意のボレル集合 $A, B \in \mathcal{B}$ に対して

$$P(X \in A,\ Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

となるときに言う．同様に n 個の確率変数 $X_1, \ldots, X_n$ が **独立**であるとは，任意のボレル集合 $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}$ に対して

$$P(X_1 \in A_1, \ldots, X_n \in A_n) = \prod_{j=1}^{n} P(X_j \in A_j)$$

となるときに言う．
無限個の確率変数 $\{X_\lambda; \lambda \in \Lambda\}$ が**独立**とはこの中の任意有限個の確率変数の組 $X_{\lambda_1}, \ldots, X_{\lambda_n}$ が独立なときに言う．

例 3.1 二つの事象 $A, B \in \mathcal{F}$ が **独立**であるとは，その指示関数 $1_A, 1_B$ が独立な時に言う．$1_A, 1_B$ は 0 か 1 の値しかとらない確率変数なので，A, B が独立とは，任意の $a, b \in \{0, 1\}$ に対して

$$P(1_A = a, 1_B = b) = P(1_A = a)P(1_B = b) \tag{3.1}$$

が成り立つことと同値である．$1_{A^c} = 1 - 1_A$ とかけるので，上の式は $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立てば成立する.（確かめてみよ）
ただし，集合の個数 n が 3 以上の時は

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \cdots P(A_n) \tag{3.2}$$

が成り立っただけでは $\{A_j\}_{j=1}^n$ が独立とは限らない．つまり (3.1) に対応する

$$P(1_{A_j}=a_j,\, j=1,2,\ldots,n)=\prod_{j=1}^n P(1_{A_j}=a_j)$$

は，任意の $a_1,a_2,\ldots,a_n \in \{0,1\}$ に対して保証できない．例えば，事象 A,B,C に対して

$$\begin{array}{ll} P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{8}, & P(A\cap B\cap C^c)=\frac{1}{6}, \\ P(A\cap B^c\cap C)=\frac{1}{6}, & P(A\cap B^c\cap C^c)=\frac{1}{24}, \\ P(A^c\cap B\cap C)=\frac{1}{12}, & P(A^c\cap B\cap C^c)=\frac{1}{8}, \\ P(A^c\cap B^c\cap C)=\frac{1}{8}, & P(A^c\cap B^c\cap C^c)=\frac{1}{6} \end{array}$$

としておくと，$P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{2}$ となり，$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$ であるが，A,B,C は独立でない．

定理 3.1 確率変数列 $X_1,\ldots,X_n$ が独立であることと次の条件が成立することは同値である．
任意の有界なボレル可測関数 $f_1,\ldots,f_n$ に対して

$$E\Big[\prod_{j=1}^n f(X_j)\Big]=\prod_{j=1}^n E\big[f(X_j)\big] \tag{3.3}$$

が成り立つことである．

証明　（十分性）任意のボレル集合 $A_1,\ldots,A_n$ に対して，$f_j(\omega)=1_{A_j}(\omega)$ とおくと，これらは有界なボレル関数だから (3.3) から

$$E\Big[\prod_{j=1}^n 1_{A_j}(X_j)\Big]=\prod_{j=1}^n E\big[1_{A_j}(X_j)\big]=\prod_{j=1}^n P(X_j\in A_j) \tag{3.4}$$

一方，

$$\prod_{j=1}^n 1_{A_j}(X_j(\omega))=1 \Leftrightarrow X_j(\omega)\in A_j, \quad j=1,2,\ldots,n.$$

だから

$$E\Big[\prod_{j=1}^n 1_{A_j}(X_j)\Big]=P(\{X_1\in A_1\}\cap\ldots\cap\{X_n\in A_n\})$$

となり，$X_1,\dots,X_n$ は独立.

（必要性）$X_1,\dots,X_n$ が独立とする．このとき定義から任意のボレル集合 $A_1,\dots,A_n$ に対して (3.4) が成り立つ．これから各 f_j が階段関数のとき，つまり

$$f_j(\omega)=\sum_{k=1}^{N_j} c_k^{(j)} 1_{A_k^{(j)}}(\omega)$$

の形のときにも (3.3) は次のようにして成り立つ.

$$\begin{aligned}
E[\prod_{j=1}^n f_j(X)] &= \sum_{k_1=1}^{N_1}\dots\sum_{k_n=1}^{N_n} E[\prod_{j=1}^n c_k^{(j)} 1_{A_{k_j}}^{(j)}(X_j)] \\
&= \sum_{k_1=1}^{N_1}\dots\sum_{k_n=1}^{N_n} \prod_{j=1}^n c_{k_j}^{(j)} E[1_{A_{k_j}}^{(j)}(X_j)] \\
&= \prod_{j=1}^n c_{k_j}^{(j)}\left(E[\sum_{k_j=1}^{N_j} 1_{A_{k_j}}^{(j)}]\right) \\
&= \prod_{j=1}^n E[f_j(X_j)]
\end{aligned}$$

各 f_j が非負のときは $f_j^{(\nu)}\nearrow f_j$ となる非負の階段関数を取ることにより単調収束定理から

$$\begin{aligned}
E[\prod_{j=1}^n f_j(X_j)] &= \lim_{\nu\to\infty} E[\prod_{j=1}^n f_j^{(\nu)}(X_j)] \\
&= \lim_{\nu\to\infty}\prod_{j=1}^n E[f_j^{(\nu)}(X_j)] \\
&= \prod_{j=1}^n E[f_j(X_j)]
\end{aligned}$$

最後に，一般の有界なボレル可測関数 f_j については，$f_j = f_j^+ - f_j^-$ と書くことで，

$$\begin{aligned} E[\prod_{j=1}^n f_j(X_j)] &= \sum_{\varepsilon_1=+1,-1} \cdots \sum_{\varepsilon_n=+1,-1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n E[\prod_{j=1}^n f_j^{\varepsilon_j}(X_j)] \\ &= \sum_{\varepsilon_1=+1,-1} \cdots \sum_{\varepsilon_n=+1,-1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n \prod_{j=1^n} E\big[f_j^{\varepsilon_j}(X_j)\big] \\ &= \prod_{j=1}^n E[f_j(X_j)] \end{aligned}$$

練習問題 3.1 X, Y が独立でそれぞれが密度関数 $f_X(x), f_Y(y)$ を持つとき，

$$P((X,Y) \in B) = \int_B f_X(x) f_Y(y) dx dy \tag{3.5}$$

が任意の 2 次元ボレル集合 B に対して成り立つ．このことを使って，X がパラメータ $\alpha > 0$ の指数分布に従い，Y がパラメータ $\beta > 0$ の指数分布に従うとき，X, Y が独立ならば

$$P(X \le Y) = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha x} \int_x^\infty \beta e^{-\beta y} dy dx$$

とかけることになる．この確率を求めよ．また，なぜこの式が成り立つのか？(3.5) を使って説明してみよ．(B をどうとるのか？)