

練習問題解答例

<http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/higuchi/index.html>

練習問題 1.1 Pólya の壺の問題で、2 回目、3 回目に赤玉が出る確率を求め、一般の n かいめの場合を推論せよ。

解答 とにかく 2 回目に赤玉が出るのは赤赤 (RR) と続くか黒赤 (BR) と続くかなので、求める確率は

$$P(RR) = \frac{1 \times 2}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$$

$$P(BR) = \frac{1 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$$

だから和を取って $1/3 + 1/6 = 1/2$ となる。

同じ調子で 3 回目に赤が出るのは

$$P(RRR) = \frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{4}$$

$$P(BRR) = \frac{1 \times 1 \times 2}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{12}$$

$$P(RBR) = \frac{1 \times 1 \times 2}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{12}$$

$$P(BBR) = \frac{1 \times 2 \times 1}{2 \times 3 \times 4} = \frac{1}{12}$$

となり、和を取ると $1/2$ がやはり出てくる。ここで注意してほしいのは赤玉の出た個数と黒玉の出た個数が階乗で分子に現れ、分母は一定であること。

したがって、 n 回目に赤玉が出たとき、赤玉の個数が全部で $k \geq 1$ 個になったとすると、黒玉は全部で $n + 1 - k$ 個壺の中にある。黒玉を取り出した回数はしたがって $n - k$ 回。

これより、例えば最初に B が $n - k$ 個並び、その後 k 回 R が現れた列と R, B の出方を勝手に入れ替えた列 (最後は R) との実現の確率は分子の数字の順番が入れ替わるだけで、かけた結果には影響はなく等しいので、 n 回目に R が出て、最終的に R が k 回 B が $n - k$ 回現れる確率は

$$\frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} \times \binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n(n+1)}$$

となる。最後が R と指定されている長さ n の $B-R$ 列で R の個数が k 個のもの総数が後ろにかかっている。これを $k = 1$ から n まで和を取ると $1/2$ になる。

講評 有名な問題です．結果が何回目も赤玉を取り出す確率がかわらないということは予想できますが，証明はなかなか難しいですね．みんなが真剣に考えている姿は，なかなかアカデミックな感じで良かったです．