練習問題解答例

http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/higuchi/index.html

練習問題 3.2 $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ は独立で各 $n \geq 1$ について X_n はパラメータ $n^{-1/4}$ のポアソン分布に従うとき，大数の強法則を使って確率 1 で

$$\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

を示したい．各 X_n の平均と分散を求め，$Y_n = X_n - E(X_n)$ について定理 3.3 が成り立つことを確かめよ．$X_n = Y_n + E(X_n)$ だから上の式 (3.1) が成り立つことを確かめよ．

解答　まず Y_n に対して大数の強法則が成り立つことを見る．

$$E(Y_n) = E(X_n - E(X_n)) = E(X_n) = E(X_n) = 0$$

で，従って

$$V(Y_n) = E(Y_N^2) = E\big((X_n - E(X_n))^2\big) = V(X_n) = n^{-1/4}$$

となり，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{V(X_n)}{n^2} = \sum_{j=1}^{\infty} n^{-9/4} \leq 1 + \int_1^{\infty} x^{-9/4} dx = \frac{9}{5} < \infty$$

だから定理 3.3 により

$$\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \to 0 (n \to \infty) \quad a.s.$$

が成り立つ．$X_n = Y_n + E(X_n) = Y_n + n^{-1/4}$ だから，

$$\frac{1 + 2^{-1/4} + \cdots + n^{-1/4}}{n} \leq \frac{1}{n}\big(1 + \int_1^n x^{-1/4} dx\big) = \frac{1}{n}\big(1 + \frac{4}{3}(n^{3/4} - 1)\big) \to 0$$

とあわせると X_n に対する大数の強法則が成り立つことが言える．

講評　大体半分ぐらいの人がわかっている感じです．おしいのは

$$\sum_{j=1}^{n} k^{-1/n}$$

が計算できなくて諦めた人．上のように積分と (面積の）比較をするといいのでしたね．