練習問題解答例

練習問題 1.1 偏りのないサイコロを 2 回投げる．このときの根元事象はどのようなものか．その確率を求めよ．更に，この確率空間で確率変数を 5 個作れ．

解答　根元事象は $i_1, i_2 \in \{1,2,3,4,5,6\}$ に対して

$$\omega(i_1, i_2) = \{1 \text{ 回目で } i_1 \text{ の目が出て，2 回目で } i_2 \text{ の目が出る }\}$$

となり，サイコロに偏りが無ければこの根元事象の確率は i_1, i_2 に関わり無く 1/36 である．5 個の確率変数を作る**最も横着な方法**は

$$X_j(\omega(i_1, i_2)) = j, \qquad j = 1,2,3,4,5$$

というのが昨年はありましたが，今年はみんな真面目に考えてました．昨年は 10 個作れといったので苦し紛れに考えついたのでしょう．でもこれも立派な正解です．

工夫して

$$X(\omega(i_1, i_2)) = i_1^{i_2}$$

なんて関数をいろいろと考えてくれた人もかなりいました．うれしいですね．日本の未来は明るいね．

例としては次のような関数を出しておきましょう．

$$\begin{aligned}
X_1(\omega(i_1, i_2)) &= i_1 \\
X_2(\omega(i_1, i_2)) &= i_2 \\
X_3 &= \alpha X_1 + \beta X_2 \qquad (\alpha, \beta \text{ は実数 }) \\
X_4 &= X_1 + X_2 \ \mathrm{mod} 2 \\
X_5 &= e^{\alpha X_3} \\
X_6 &= {X_3}^n \\
X_7 &= \frac{1}{1 + X_2^2} \\
X_8 &= \left\{ \begin{array}{ll} 1, & X_1 = X_2 = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{array} \right. \\
X_9 &= \mathrm{Arctan} X_5 \\
X_{10} &= \begin{cases} 1, & \text{if } X_1 > X_2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$

練習問題 1.2 例 1.12 の確率変数 X_1, X_2, X_3 のそれぞれについてその分布を求めよ．

解答　X_1 の値域は

$$\{k, k=1,2,\dots,6\}$$

で，対応は 1 対 1. それぞれの値をとる確率は

$$P(X_2=k)=P(\omega_k)=\frac{1}{6}$$

X_2 の値域は $\{1,4,9,16,25,36\}$ で，対応は 1 対 1. よって

$$P(X_2=k^2)=P(\omega_k)=\frac{1}{6}$$

X_3 の値域は $\{0,\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2},1\}$ で対応は 1 対 1　ではない.

$$\begin{aligned}X_3^{-1}(0)&=\{\omega_6\}\\X_3^{-1}(\frac{1}{2})&=\{\omega_1,\omega_5\}\\X_3^{-1}(\frac{\sqrt{3}}{2})&=\{\omega_2,\omega_4\}\\X_3^{-1}(1)&=\{\omega_3\}\end{aligned}$$

となり，

$$\begin{aligned}P(X_3=0)&=\frac{1}{6}\\P\left(X_3=\frac{1}{2}\right)&=\frac{1}{3}\\P\left(X_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\right)&=\frac{1}{3}\\P(X_3=1)&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

次は解答しなくてもいい問題でしたが，答を書いておきます.

練習問題 1.3 30 人のクラスの誕生日の組み合わせの根元事象はどのようなものか？一つの根元事象の確率はどのように決めればよいか？更に， 30 人の誕生日がすべて異なる確率を求めよ.

解答　クラスの 30 人に番号をつけて，i 番目の人の誕生日を x_i と書くことにすると根元事象は

$$\omega=\{x_1=b_1,x_2=b_2,\dots,x_{30}=b_{30}\}$$

と表すことができる．ここに各 $j=1,2,\dots,30$ に対して

$$b_j\in B=\{1/1,1/2,\dots 12/31\}$$

と 1 月 1 日から 12 月 31 日まで 365 日を順に並べた集合 B を使って表すことができる．2/29 を付け加えてうるう年を考慮に入れてもよいが，ここではそこまで面倒なことはしないでおく.

根元事象を

$$\omega_j = 1/1, 1/2, \ldots, 12/31$$

とした人が多かったが，これは一人の人の誕生日 (われわれはその情報をまったく知らないという設定の下で）を考えたときの根元事象になる．二人の人の誕生日を一緒に考えるとそれぞれの可能性が 365 通りあるから合計では 365^2 個の組み合わせの可能性がある．(最初の人の誕生日と 2 番目の人の誕生日を入れ替えると，違う場合になることにも注意が必要.

30 人の誕生日のあり方は合計で 365^{30} 通りとなり，どれも同じくらい確からしいとして，それぞれの根元事象の確率はみな同じで 365^{-30} となる．

一番目の人の誕生日の可能性は 365 通りで，2 番目の人はこれと違う誕生日を持つ可能性は 364 通り，3 番目の人が最初の二人と違う誕生日である可能性は 363 通り，と 1 ずつ減っていくので，30 人がすべて違う誕生日である場合の数は

$$365 \times 364 \times \ldots (365 - 29)$$

となる．したがって求める確率（ 30 人がすべて誕生日が違う確率）は,

$$1 \times \left(1 - \frac{1}{365}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{29}{365}\right)$$

となる.（参考までに計算してみると，この確率は 0.2937... となり，3 割に達していない．）