

練習問題解答例

練習問題 1.4 μ_n が 2 項分布 $B(n, \frac{c}{n})$ ならば $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\mu_n(k) \rightarrow \frac{c^k}{k!} e^{-c}$$

となることを証明せよ. n とともに確率がだんだん小さくなっている時, 平均的には n 回中 c 回起こるような出来事 of 確率は $n \rightarrow \infty$ のときパラメータ c のポアソン分布に近づいていく. これはポアソンの少数の法則と呼ばれる定理の簡単な場合にあたる.

ポアソン分布が起こりにくい事 of 起こり方を表していると言われる由縁でもある.

解答

$$\begin{aligned} \mu_n(k) &= \binom{n}{k} \frac{c^k}{n} \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{c^k}{n} \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!n^k} c^k \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{n-k} \\ &\rightarrow 1 \cdot \frac{c^k}{k!} e^{-c}. \end{aligned}$$

これは組み合わせの計算と極限の問題です. できはよかったです.

練習問題 1.5 ここにあげた以外の分布を知っていれば, その名前をあげよ. できればその分布について知っていることを何でもいいから説明せよ.

解答 色々ありますが, ほとんどが連続な分布なのでまだ教えていません. できなくても当たり前とも言えます.

「人口分布」「温度分布」などというのもありました. 好きですね. こういう苦し紛れ.

いくつかまだ説明していない分布をあげて置きましょう

多項分布 $n \geq 3, p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$ で各 p_j が 0 以上の時, $N \geq 1, k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$, かつ $k_1 + \dots + k_n = N$ のとき,

$$P_N(k_1, k_2, \dots, k_n) = \frac{N!}{k_1! k_2! \dots k_n!} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_n^{k_n}$$

これは, n 種類の鳥がそれぞれ p_1, p_2, \dots, p_n の割合でいる森にバードウォッチングに行ったとき, 全部で N 羽の鳥を見るときそれぞれの種類の鳥を k_1, k_2, \dots, k_n 羽見る確率になる.

正規分布 ガウスの誤差曲線とも呼ばれるベル型の美しい曲線を密度関数に持つ連続分布. 後で詳しく説明するが, 偏差値でこの分布はお馴染み. 日本人の身長などの分布もこうなる.

カイ自乗分布 サンプルの分散の分布がこの形になる事が多い。統計でよくでてくる。

F 分布, t 分布 どちらも統計でよくでてくる。F 分布は二つの独立なカイ自乗分布の比による分布。t 分布はサンプルの平均をサンプルの標準偏差でわったものの分布を扱うときに出てくる。正規分布に似ているが違う。この分布はギネスビールに勤務していたゴセットと言う人がサンプル数が少ないときの分布は正規分布から微妙にずれる事に気づいたのが始まりと言われる。彼はこの結果を発表するに際して会社に迷惑をかけないようにと Student というペンネームを使ったといわれ、今日では Student 分布とも呼ばれている。

指数分布 これも連続な分布。放射性物質のはなつ放射能をカウントすると、大体この分布に従う。

まだまだ色々ある様ですが、この辺にしておきましょう。興味を持った人はいろいろ調べてレポートにして出してみてください。レポートは自分の言葉で書きましょう(つまりコピペはダメですよということ。これは剽窃、盗作という行為になります。学問の世界では重罪です。)