練習問題解答例

練習問題 2.3 二つの集合 A, B が等しい事を示すには $A \supset B$ かつ $A \subset B$ を言う．$A \subset B$ を示すには，A の勝手な要素 $\omega \in A$ が $\omega \in B$ を満たすことを言う．

$A \subset \Omega$ のとき，

$$A^c = \{\omega \in \Omega; \omega \notin A\}$$

と定義するとき，

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

を証明してみよ．

解答　ベン図を使うと簡単なのに，言葉で言うと難しいですね．次のように議論します．

- $(A \cap B)^c \subset A^c \cup B^c$ について：
  $\omega \in (A \cap B)^c$ として $\omega \in A^c \cup B^c$ を言う．結論を言うには，$\omega \in A$ ならば $\omega \in B^c$ を言えば良い．（このとき $\omega \in A^c \cup A \cap B^c \subset A^c \cup B^c$.）そこで，$\omega \in A$ としよう．仮定から $\omega \in (A \cap B)^c$ なので，$\omega \in B$ ならば $\omega \in A \cap B$ となるので矛盾．つまり $\omega \in B^c$ でなくてはいけない．

- $A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$ について：
  最初に $A \supset A \cap B$ だから $A^c \subset (A \cap B)^c$ に注意する.（実際，$\omega \in A \cap B$ ならば $\omega \in A$ となるが，いま $\omega \in A^c$ としているので，これは不可能. つまり $\omega \in (A \cap B)^c$ でなくてはならない.）同じように $B^c \subset (A \cap B)^c$ も成り立つので，

  $$A^c \cup B^c \subset (A \cap B)^c$$

  （実際，$\omega \in A^c \cup B^c$ ならば $\omega \in A^c$ または $\omega \in B^c$ となっているが，どちらの場合も上で言ったように $\omega \in (A \cap B)^c$ となっているから.）

講評　数学科の学生は論理の練習をしているのでなれていますね．他の人たちもベン図はかけているので，分かってはいるようです．

練習問題 2.4 Ω の部分集合の集合族 $\mathcal{A}$ が *algebra* であるとは，

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A}$ ならば $A^c \in \mathcal{A}$.
3. $A, B \in \mathcal{A}$ ならば $A \cup B \in \mathcal{A}$.

となるときに言う．$\mathcal{A}$ が *algebra* のとき，次を示せ．

$$A, B \in \mathcal{A} \quad \text{ならば} \quad A \cap B \in \mathcal{A}$$

解答　$A, B \in \mathcal{A}$ とすると，algebra の条件 (ii) から $A^c, B^c \in \mathcal{A}$ がでる．

すると algebra の条件 (iii) を使うと $A^c \cup B^c \in \mathcal{A}$ となるが，上の問題の結果から $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$ なので $(A \cap B)^c \in \mathcal{A}$ が分かる．

そうするともう一度 algebra の条件 (ii) を使って $A \cap B = \{(A \cap B)^c\}^c \in \mathcal{A}$ となる．

講評　まずまずよくできているようです．