練習問題解答例

http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/higuchi/index.html

練習問題 2.5 X を 2 乗可積分とし，$EX = m$ とするとき，

$$P(X \geq m + a) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

を証明せよ．

解答　本当は $a > 0$ を条件として言っておかないと問題として不適切でした．みんなちゃんと修正して解いてくれました．

X が 2 乗可積分とは X^2 が可積分であることを言います．したがって分散 $V(X) = E(X-m)^2 = E(X^2) - m^2$ も有限です．確率変数としては $Y = (X-m)^2$ を考えましょう．これは負にならない確率変数で，$f(x) = x1_{\{x \geq 0\}}$ は単調非減少，非負なので Chebyshev の不等式が使えて

$$P(Y \geq \lambda) \geq \frac{E[f(Y)]}{f(\lambda)} = \frac{E[(X-m)^2]}{\lambda} = \frac{V(X)}{\lambda}$$

が $\lambda > 0$ に対して成り立つ．　ここで $\lambda = a^2$ とすると

$$P(Y \geq a^2) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

ところで，

$$\{Y \geq a^2\} = \{|X - m| \geq a\} \supset \{X \geq m + a\}$$

だから，

$$P(X \geq m + a) \leq P(Y \geq a^2) \leq \frac{V(X)}{a^2}$$

講評　よくできていました．X の分散 $V(X)$ の定義は，

$$V(X) = E\left[(X - EX)^2\right]$$

と言う式なので，右辺の式が出てきたところですぐに $V(X)$ としていいのですが，$V(X)$ は離散的な確率変数の時だけちゃんと定義していたので，困った人もいた様です．