練習問題解答例

http://www.math.kobe-u.ac.jp/HOME/higuchi/index.html

練習問題 2.7 次の分布の分布関数を求めよ．

(i) 区間 $[a,b]$ 上の**一様分布**は

$$\mu(A)=\frac{1}{b-a}\int_{A\cap[a,b]}dx$$

である．

(ii) 2項分布 $B(3,0.5)$．

(iii) パラメータ 1 のポアソン分布

解答 (i) $[a,b]$ 上の一様分布の分布関数は，密度関数が

$$\frac{1}{b-a}\cdot 1_{[a,b]}(x)$$

となるので，分布関数はこれを $-\infty$ から t まで積分して

$$F(t)=\int_{-\infty}^{t}1_{[a,b]}(x)dx=\begin{cases}0 & t\le a\\ \frac{t-a}{b-a} & a\le t\le b\\ 1 & b\le t\end{cases}$$

(ii) i に集中したディラック分布 δ_i の分布関数を $F_i(t)$ と書くと，$B(3,0.5)$ の分布関数は

$$F(t)=\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}\frac{1}{2^3}F_i(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{8} & 0\le t<1\\ \frac{1}{2} & 1\le t<2\\ \frac{7}{8} & 2\le t<3\\ 1 & 3\le t\end{cases}$$

となる．
(iii) 同様にディラック分布 δ_i の分布関数 $F_i(t)$ を使うと，

$$F(t)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{e\cdot i!}F_i(t)$$

これは $n\le t<n+1$ のとき

$$F(t)=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{k!}e^{-1}=\sum_{i=0}^{[t]}\frac{1}{k!}e^{-1}$$

とかける．

講評　ディラック分布の扱い方に戸惑う人が結構いました．特に (iii) は無限個の場合分けが必要なので，どう書いて良いのか戸惑った人もいた様です．デイラック分布の分布関数が i で 高さ 1 だけジャンプして増える階段関数なので， (ii) や (iii) はこの高さがそれぞれの点 i の確率 $\mu(i)$ の値にかわったものを足し合わせることになります．結果はやはり自然数で増加する階段関数の形です．(ii) では増加する点は 3 までですね．