伊藤の公式の多次元への拡張は次のようになる。証明の方法は 1 次元のときと本質的に変わりはない。

定理 2.20 $f : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ は $C^{1,2}$-級の関数とし，$\mathbb{R}^n$ に値をとる確率過程 $X(t)$ が

$$X_j(t) = X_j(0) + \sum_{k=1}^{d} \int_0^t a_{j,k}(s,\omega)dB_k(s) + \int_0^t b_j(s,\omega)ds$$

を満たすものとする．ただし，$a_{j,k}(t,\omega)$, $b_j(t,\omega)$ はそれぞれ $a.s.$ で次の条件をみたすものとする．

$$\int_0^t a_{j,k}(s,\omega)^2 ds < \infty, \quad \int_0^t |b_j(s,\omega)|ds < \infty$$

また， $B_j(t)$, $j = 1,2,\ldots,d$ は独立な Brown 運動とする．このとき，

$$\begin{aligned}
f(t,X(t)) &= f(0,X(0)) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X(s))ds \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{d} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(s,X(s))a_{j,k}(s,\omega)dB_k(s) \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(s,X(s))b_j(s,\omega)ds \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{d}\sum_{k=1}^{n} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(s,X(s))a_{i,k}a_{j,k}ds
\end{aligned}$$

例 2.2 $B(t)$ を $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動として，

$$\begin{aligned}
X(t) &= X(0) + \int_0^t a(s)dB(s) + \int_0^t b(s)ds \\
Y(t) &= Y(0) + \int_0^t \alpha(s)dB(s) + \int_0^t \beta(s)ds
\end{aligned}$$

とする．$a, \alpha \in \mathcal{L}^2$, b, β は有界で $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測として置く．この時，$f(x,y) = xy$ に伊藤の公式を適用してみよう．定理 2.20 で $d = 1, n = 2$ の場合に当たる．この時，

$$\begin{aligned}
X(t)Y(t) = X(0)Y(0) &+ \int_0^t \big(X(s)\alpha(s) + Y(s)a(s)\big)dB(s) \\
&+ \int_0^t \big(X(s)\beta(s) + Y(s)b(s)\big)ds + \int_0^t a(s)\alpha(s)ds
\end{aligned}$$

となる．とくに X, Y が $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールのとき，つまり，$b = \beta = 0$ のとき，

$$X(t)Y(t) - \int_0^t a(s)\alpha(s)ds$$

は再び $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールとなる．

例 2.3 $f(x) = x^2, X(t) = B(t)$ に対して伊藤の公式を使うと、$f'(x) = 2x, f''(x) = 2$ また (2.12) において、$a(t) = 1, b(t) = 0$ なので、

$$B(t)^2 = B(0)^2 + \int_0^t \frac{1}{2} \times 2ds + \int_0^t 2B(s)dB(s) = t + 2\int_0^t B(s)dB(s)$$

したがって、 $B(t)^2 - t$ というマルチンゲールは実は

$$2\int_0^t B(s)dB(s)$$

という形をしている事がわかる。

例 2.4 次の方程式を解きたい．

$$S(t) = x_0 + \int_0^t S(s)(\mu ds + \sigma dB(s)) \tag{2.17}$$

形式的には

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu ds + \sigma dB(s)$$

と書けるので， $\log S(t)$ を考えてみると，伊藤の公式により，

$$\log S(t) - \log x_0 = \int_0^t \frac{dS(s)}{S(s)} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\sigma^2 S(s)^2}{S(s)^2}ds = \int_0^t \sigma dB(s) + \int_0^t \mu ds - \frac{\sigma^2}{2}t$$

となり，これより，

$$S(t) = x_0 \exp\{\int_0^t \sigma dB(s) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t$$

でなければならないことがわかる．実際 $f(x) = e^x$ について，$X(t) = x_0 + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma B(t)$ とおくと，伊藤の公式から上の $S(t)$ が (2.17) を満たすことがわかる．

例 2.5 $B(t), W(t)$ を独立な $\mathcal{F}_t$-ブラウン運動として、$Z(t) = e^{aB(t)+bW(t)}$ に対して伊藤の公式を使う。

$X_1(t) = aB(t), X_2(t) = bW(t)$ として、$f(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$ を用いると $Z(t) = f(X_1(t), X_2(t))$ なので、$f_{x_i} = f, f_{x_i,x_j} = f, i, j = 1, 2$ に注意して、伊藤の公式により、

$$\begin{aligned} Z(t) &= Z(0) + \int_0^t f_{x_1}(X_1(s), X_2(s))dX_1(s) + \int_0^t f_{x_2}(X_1(s), X_2(s))dX_2(s) \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t f_{x_1,x_1}(X_1(s), X_2(s))a^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t f_{x_2,x_2}(X_1(s), X_2(s))b^2 ds \\ &= 1 + \int_0^t Z(s)(adB(s) + bdW(s)) + \frac{1}{2}\int_0^t Z(s)(a^2 + b^2)ds \end{aligned}$$

練習問題 2.4 次の $X(t)$ について伊藤の公式を計算せよ。ただし、$B(t), W(t)$ は独立なブラウン運動とする。

(i) $X(t) = B^2(t)$

(ii) $X(t) = (B(t) + at)^5$　a は定数。

(iii) $X(t) = \log(1 + B(t)^2 + W(t)^2)$

(iv) $X(t) = e^{at+bB(t)}$　a, b は定数

(v) $X(t) = B(t)W(t)$

(vi) $X(t) = B(t)e^{B(t)}$

(vii) $X(t) = \exp\{i\int_0^t a(s)dB(s)\}$　$a(t)$ は *non-random* な連続関数

練習問題 2.5

$$X(t) = e^{-bt}\{a + \int_0^t e^{bs}dB(s)\}$$

は次の確率微分方程式を満たすことを示せ。

$$X(t) = a + B(t) - b\int_0^t X(s)ds$$

練習問題 2.6 $n \geq 0$ に対して *Hermite* 多項式 $H_n(t, x)$ を

$$H_n(t, x) = \frac{(-t)^n}{n!}e^{x^2/(2t)}\frac{\partial^n}{\partial x^n}e^{-x^2/(2t)}$$

と定める。このとき、

(i) 次の等式を証明せよ。ただし、γ は実数とする。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n H_n(t,x) = \exp\{\gamma x - \frac{\gamma^2 t}{2}\}$$

(ii) $M_\gamma(t)$ を

$$M_\gamma(t) = \exp\{\gamma B(t) - \frac{\gamma^2 t}{2}\}$$

とおくとき、$M_\gamma(t)$ は次の確率微分方程式を満たすことを証明せよ。

$$M_\gamma(t) = 1 + \gamma \int_0^t M_\gamma(s) dB(s)$$

(iii) 上の確率微分方程式を満たす確率過程は $M_\gamma(t)$ のみであることが知られている。このことを使って、

$$\mathcal{Z}_n(t) = H_n(t, B(t))$$

に対して、

$$M_\gamma(t) = \sum_0^{\infty} \gamma^n \mathcal{Z}_n(t)$$

をこの確率微分方程式に代入して

$$\mathcal{Z}_{n+1}(t) = \int_0^t \mathcal{Z}_n(s) dB(s)$$

が成り立つことを証明し、

$$H_n(t, B(t)) = \int_0^t dB(t_1) \int_0^{t_1} dB(t_2) \cdots \int_0^{t_{n-1}} dB(t_n)$$

を証明せよ。