第3章　確率解析とBrown 運動

3.1　セミ・マルチンゲールによる確率解析

3.1.1　Doob-Meyer の分解定理：連続時間

離散時間の Doob-Meyer の分解定理は連続時間でもちょっとした条件の下で成り立つ．まず，この事実から紹介しよう．$a > 0$ に対して

$$\mathcal{S}_a = \{T; (\mathcal{F}_t) - \text{停止時刻で,} \quad T \leq a \ a.s.\}$$

であったことを思い出そう．

定義 3.1 $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲール $X(t)$ が **(DL) クラス**であるとは任意の $a > 0$ に対して，$\{X(T); T \in \mathcal{S}_a\}$ が一様可積分であること，つまり

$$\lim_{K\to\infty} \sup_{T\in\mathcal{S}_a} \int_{|X(T)|\geq K} |X(T)| P(d\omega) = 0$$

となることを言う．

注意 3.1 非負の $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲール $X(t)$ は (DL) クラスである．なぜなら，任意抽出定理により，$T \in \mathcal{S}_a$ のとき

$$\int_{\{|X(T)|\geq K\}} X(T,\omega)P(d\omega) \leq \int_{\{|X(T)|\geq K\}} X(a,\omega)P(d\omega)$$

で，チェビシェフの不等式と劣マルチンゲール性より，$X \geq 0$ だから

$$P(|X(T)| \geq K) \leq \frac{E(X(T))}{K} \leq \frac{E(X(a))}{K}$$

と $T \in \mathcal{S}_a$ によらずに一様に確率が評価できている．積分の絶対連続性からこれは

$$\int_{\{|X(T)|\geq K\}} |X(a,\omega)|P(d\omega)$$

が $T \in \mathcal{S}_a$ によらずに一様に小さい．

同様の議論で次も言える．

注意 3.2 $M(t)$ が 2 乗可積分な $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールであるならば，$M(t)^2$ は (DL) クラスである．

定義 3.2 $A(t)$ が次の 3 つの条件を満たすとき，$A(t)$ を**可積分増加過程**と呼ぶ．

(i) $A(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-適合．

(ii) $A(0) = 0$ で，$A(t)$ は右連続かつ単調非減少．*a.s.*

(iii) $E(A(t)) < \infty \ \forall t \geq 0$.

定義 3.3 可積分増加過程 $A(t)$ が**自然**であるとは，任意の有界な $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール $M(t)$ に対して

$$E\left[\int_0^t M(s)dA(s)\right] = E\left[\int_0^t M(s-)dA(s)\right]$$

がすべての $t \geq 0$ で成り立つときに言う．

自然に見える条件かどうかは見にくいが，$A(t)$ が連続ならば，上の等式は成り立っているから，$A(t)$ は「自然」の条件を満たしている．

定理 3.3 (Doob-Meyer の分解定理：連続時間）
$X(t)$ が (DL) クラスの $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールならば，

$$X(t) = M(t) + A(t)$$

という分解が成り立つ．ただし，$M(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールで，$A(t)$ は可積分増加過程．さらに，このとき $A(t)$ としては自然な可積分増加過程を取ることができ，自然な $A(t)$ は一意的に決まる．その意味で分解は一意的である．

この定理の証明は省略する．

$M(t)$ が 2 乗可積分な $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールならば Jensen の不等式により，$M(t)^2$ は非負の $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲールで，注意 3.2 により，(DL) クラスである．したがって Doob-Meyer の分解定理により，$M(t)^2 = N(t) + \langle M \rangle(t)$ と分解でき，$N(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール，$\langle M \rangle(t)$ は自然な可積分増加過程となる．この分解は一意的である．

定義 3.4 $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲール $X(t)$ が**正則**であるとは，任意の $a > 0$ と任意の $T_n \in \mathcal{S}_a$ で，$T_n \nearrow T$ となるものに対して

$$\lim_{n\to\infty} E(X(T_n)) = E(X(T))$$

が成り立つことを言う．

定理 3.4 (DL) クラスの $(\mathcal{F}_t)$-劣マルチンゲール $X(t)$ が正則ならば，Doob-Meyer 分解で得られる自然な可積分増加過程 $A(t)$ は連続になる．

証明はこれも省略する．

系 3.5 $\{M(t)\}$ が連続で 2 乗可積分な $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールならば，自然な可積分増加過程 $\langle M\rangle(t)$ が存在して $M(t)^2 - \langle M\rangle(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールとなるが，このとき $\langle M\rangle(t)$ も連続である．

証明　$M(t)^2$ は正則な劣マルチンゲールであることを示せば良い．正則性が問題だが，任意に $a > 0$ と $T_n \in \mathcal{S}_a$ を $T_n \nearrow T$ となるように取る．M は連続なので，ω ごとには $n \to \infty$ のとき

$$M(T_n(\omega), \omega)^2 \to M(T(\omega), \omega)^2$$

で，Fatou の補題から

$$E(M(T)^2) \le \liminf_{n\to\infty} E(M(T_n)^2)$$

逆の不等式を示そう．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，一様可積分性から

$$\sup_{n\ge 1} \int_{\{M(T_n)^2 \ge K\}} M(T_n)^2 P(d\omega) \le \varepsilon$$

が十分大きな K に対して常に成り立つ．これより

$$\begin{aligned} EM(T_n)^2 &\le \int_{\{M(T_n)^2 \le K\}} M(T_n)^2 P(d\omega) + \varepsilon \\ &= \int_{\{M(T_n)^2 \le K\}} M(T_n)^2 \wedge K P(d\omega) + \varepsilon \end{aligned}$$

ただし，$x \wedge y = \min\{x, y\}$ である．右辺はさらに次より小さい．

$$E(M(T_n)^2 \wedge K) + \varepsilon$$

有界収束定理からこれは $n \to \infty$ のとき $E(M(T)^2 \wedge K) + \varepsilon$ に収束する．よって

$$\limsup_{n\to\infty} E(M(T_n)^2) \leq E(M(T)^2) + \varepsilon$$

が成り立ち，$\varepsilon > 0$ は任意なので，結論が言えた． □

3.1.2　2 乗可積分マルチンゲールと確率積分

連続で 2 乗可積分な $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール $M(t)$ を一つ止めて話をする．M による確率積分が定義できる事をざっと見る．まず，$\Phi \in \mathcal{L}_0$ つまり階段過程 Φ に対しては

$$I^M(\Phi)(t) = \sum_{j=1}^{k} \Phi(t_{j-1})(M(t_j \wedge t) - M(t_{j-1} \wedge t))$$

として Brown 運動の時と同じように定義できる．$I^M(\Phi)(t)$ は連続，$(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールであり，Φ について線形である．等長性だけが変わる．実際，Brown 運動に関する確率積分の時と同様にして $t > v$ のとき

$$E\left[I^M(\Phi)(t)^2 - \int_0^t \Phi(s)^2 d\langle M\rangle(s) \middle| \mathcal{F}_v\right] = I^M(\Phi)(v)^2 = \int_0^v \Phi(s)^2 d\langle M\rangle(s)$$

が成り立つことを確かめることができる．そこで，$\mathcal{L}^2(\langle M\rangle)$ という Hilbert 空間を新しく用意する．

$$\mathcal{L}^2(\langle M\rangle) = \left\{\Phi :\ \begin{array}{l} \Phi \text{ は } (\mathcal{F}_t)\text{-発展的可測で，任意の } T > 0 \text{ に対し} \\ E\int_0^T \Phi(t)^2 d\langle M\rangle(t) < \infty \end{array}\right\}$$

明らかに，$\mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}^2(\langle M\rangle)$ である．少し面倒だが，このときやはり，$\mathcal{L}_0$ は $\mathcal{L}^2(\langle M\rangle)$ で稠密であることが確かめられる．従って上の新しい等長性を使って Brown 運動に関する確率積分と同じように $\mathcal{L}^2(\langle M\rangle)$ まで確率積分 $I^M(\Phi)$ の定義を拡張することができる． これを

$$\int_0^t \Phi(s)dM(s) = \int_0^t \Phi(s,\omega)dM(s,\omega)$$

と書くことにする．このとき，伊藤の公式も拡張できる．

定義 3.5 (i) $(\mathcal{F}_t)$-適合な $A(t)$ が**可積分有界変動過程**であるとは，任意の有界区間上で $A(t)$ は確率 1 で有界変動関数であり，$A(0)=0$ かつ

$$EA(t) < \infty \quad \forall t > 0$$

を満たすときに言う．

(ii) $(\mathcal{F}_t)$-適合な $X(t)$ が連続な $(\mathcal{F}_t)$-**セミマルチンゲール**であるとは，$X(t)$ は分解

$$X(t) = X(0) + M(t) + A(t)$$

をもつときに言う．ただし，$X(0)$ は $\mathcal{F}_0$-可測な 2 乗可積分な確率変数，$M(t)$ は $M(0)=0$ を満たす連続で 2 乗可積分な $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールで，$A(t)$ は連続な可積分有界変動過程である．

3.1.3 セミマルチンゲールに対する伊藤の公式

定理 3.6 $X(t)$ を連続な $(\mathcal{F}_t)$-セミマルチンゲールであるとする．このとき，C^2-級の関数 $f(x)$ に対して

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))dM(s) + \int_0^t f'(X(s))dA(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))d\langle M\rangle(s)$$

が成り立つ．これがセミマルチンゲールに対する伊藤の公式と呼ばれる．

証明は Brown 運動の時とほぼ同じ.

定義 3.6 $M(t), N(t)$ がともに 2 乗可積分な $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールであるとき，$(M \pm N)(t) = M(t) \pm N(t)$ も $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールであるので，$\langle M \pm N\rangle(t)$ が考えられる． M, N が連続なら $\langle M \pm N\rangle(t)$ も連続である．このとき，

$$\langle M, N\rangle(t) = \frac{1}{4}\left(\langle M+N\rangle(t) - \langle M-N\rangle(t)\right)$$

と定義することにする．

注意 3.7 このとき $\langle M, N\rangle(t)$ は 自然な可積分有界変動過程で $M(t)N(t) - \langle M, N\rangle(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールである．実際，

$$M(t)N(t) = \frac{1}{4}\left(\left(M(t)+N(t)\right)^2 - \left(M(t)-N(t)\right)^2\right)$$

で，$M(t) \pm N(t)$ は *2* 乗可積分なマルチンゲールだから *Doob-Meyer* 分解から $\langle M \pm N \rangle$ が自然な可積分増加過程になり，

$$M(t)N(t) - \langle M, N \rangle(t)$$

は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールである．

なので，多変数のときの伊藤の公式は次の形になる．この証明も Brown 運動の時と同様.

定理 3.8 $X_j(t) = X_j(0) + M_j(t) + A_j(t)$, $1 \le j \le k$ が連続かつ 2 乗可積分な $(\mathcal{F}_t)$-セミマルチンゲールであるとする．$f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ が C^2-級のとき

$$\begin{aligned}
f(X_1(t), \ldots, X_k(t)) =& f(X_1(0), \ldots, X_k(0)) \\
&+ \int_0^t \sum_{j=1}^k f_{x_j}(X_1(s), \ldots, x_k(s)) dM_j(s) \\
&+ \int_0^t \sum_{j=1}^k f_{x_j}(X_1(s), \ldots, x_k(s)) dA_j(s) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^k f_{x_i x_j}((X_1(s), \ldots, x_k(s)) d\langle M_j, M_i \rangle(s)
\end{aligned}$$