3.2 マルチンゲールの表現定理

2 乗可積分な $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールはブラウン運動を使って表すことができる．このことを見ていこう．

定理 3.9 $M(t)$ を 2 乗可積分なマルチンゲールとする．このとき，

$$\langle M\rangle(t) = t$$

が任意の $t \geq 0$ で成り立つならば，$M(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動である．

証明　$t > s \geq 0$ のとき

$$E\left(e^{ia(M(t)-M(s))}\middle|\mathcal{F}_s\right) = e^{-\frac{a^2}{2}(t-s)}$$

を示せば十分．左辺を s を止め t の関数と見て $\phi_a(t)$ とかく．伊藤の公式から

$$e^{iaM(t)} = e^{iaM(s)} + ia\int_s^t e^{iaM(u)}dM(u) - \frac{a^2}{2}e^{iaM(u)}d\langle M\rangle(u)$$

となる．$e^{iaM(s)}$ で両辺を割った後，両辺の $\mathcal{F}_s$ での条件付き期待値をとると $\langle M\rangle(u) = u$ であることから

$$\phi_a(t) = \phi_a(s) - \frac{a^2}{2}\int_s^t \phi_a(u)du$$

となり，初期条件 $\phi_a(s) = 1$ の下でこれを解いて

$$\phi_a(t) = e^{-\frac{a^2}{2}(t-s)}.$$

□

例 3.1 (i) $B(t)$ を $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動とするとき，$X(t) = \int_0^t \mathrm{sgn}(B(s))dB(s)$ は $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動．実際，

$$\langle X\rangle(t) = \int_0^t (\mathrm{sgn}(Bs))^2 ds = t \quad a.s.$$

だから，定理 *3.9* により $X(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動である．

(ii) $B_1(t), \ldots, B_k(t)$ を独立な $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動とするとき，

$$\rho(t) = \sqrt{B_1(t)^2 + \ldots + B_k(t)^2}, \quad X(t) := \sum_{j=1}^{k} \int_0^t \frac{B_j(s) dB_j(s)}{\rho(s)}$$

と置く．$X(t)$ が $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動であることを見よう．$X(t)^2$ に伊藤の公式を使う．記号として

$$X_j(t) = \int_0^t \frac{B_j(s) dB_j(s)}{\rho(s)} \qquad 1 \le j \le k$$

として，これを

$$X_j(t) = \sum_{i=1}^{k} \int_0^t a_{ji}(s) dB_i(s)$$

と書くと，

$$a_{ji}(s) = \delta_{ji} \frac{B_j(s)}{\rho(s)}$$

となっている．$f(x_1, \ldots, x_k) = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_k^2}$ に対して伊藤の公式を使うと，

$$X(t)^2 = 2 \int_0^t \sum_{i,j=1} \int_0^s a_{j,i}(u) dB_i(u) \frac{B_j(s)}{\rho(s)} dB_j(s) + \int_0^t \sum_{j=1}^{k} a_{jj}(s)^2 ds$$

右辺第 1 項はマルチンゲール，第 2 項は t になり，$\langle X \rangle(t) = t$ だから，定理 *3.9* により $X(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動である．

定理 3.10 (マルチンゲールの表現定理) $B(t)$ を $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動とし，

$$\mathcal{F}_t^B := \sigma \{ B(s) \, ; \, 0 \le s \le t \}$$

と置く．$M_1(t), \ldots, M_n(t)$ が 任意の $1 \le i \le n$ について $M_i(0) = 0$ を満たす　2 乗可積分な $(\mathcal{F}_t^B)$-マルチンゲールならば，ある $\Phi_i(s) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t^B)$ がとれて，

$$M_i(t) = \int_0^t \Phi(s) dB(s) \qquad 1 \le i \le n$$

と言う式が成り立つ．ただし，

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t^B) := \left\{ \Phi \, ; \, (\mathcal{F}_t^B) - \text{発展的可測}, E(\int_0^T \Phi(s)^2 ds) < \infty, \ T > 0 \right\}$$

とする．

証明はそれぞれの $M_i(t)$ について言えれば良いので，$n=1$ の場合を示せば十分．補題を二つ用意する．

補題 3.11 $X(t)$ が $(\mathcal{F}_t)$-適合で可積分な確率過程で $X(0)=0$ を満たすとする．任意の $T>0$ に対して

$$\mathcal{S}_T := \{\tau\,;\,(\mathcal{F}_t) - \text{停止時刻}, \tau \leq T \quad a.s.\ \}$$

とおくとき，任意の $T>0$ と任意の $\tau \in \mathcal{S}_T$ に対して

$$E(X(\tau)) = 0$$

となるならば，$X(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール．

証明 任意の $T > 0$ を与えて，$\tau, \sigma \in \mathcal{S}_T$ が $\tau \geq \sigma\ a.s.$ となるとき，$E(X(\tau)|\mathcal{F}_\sigma) = X(\sigma)$，つまり任意の $A \in \mathcal{F}_\sigma$ に対して

$$E(X(\tau)1_A) = E(X(\sigma)1_A)$$

を示せば十分（定数時刻は停止時刻）．$A \in \mathcal{F}_\sigma$ を任意に一つとる．

$$\sigma_A(\omega) = \begin{cases} \sigma(\omega) & \omega \in A \text{ のとき}, \\ T & \omega \notin A \text{ のとき}, \end{cases}$$
$$\tau_A(\omega) = \begin{cases} \tau(\omega) & \omega \in A \text{ のとき}, \\ T & \omega \notin A \text{ のとき}, \end{cases}$$

と置くと $\sigma_A, \tau_A \in \mathcal{S}_T$ である．実際，$\sigma_A, \tau_A \leq T$ は作り方から明らかで，$t<T$ のとき $\tau \geq \sigma\ a.s.$ なので

$$\{\tau_A \leq t\} = A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

が $A \in \mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$ からわかる．$\{\sigma_A \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ も同様にわかるので，$\sigma_A, \tau_A \in \mathcal{S}_T$ がわかる．仮定により，このとき

$$E(X(\tau_A)) = E(X(\sigma_A)) = 0$$

両辺を定義にしたがって書き換えると，

$$E(X(T)1_{A^c}) + E(X(\tau)1_A) = E(X(T)1_{A^c}) + E(X(\sigma)1_A)$$

これより，求める式が得られる． □

$$\mathcal{N}=\left\{\int_0^t \Phi(s)dB(s)\,;\,\Phi\in\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t^B)\right\}$$

と書くことにする．

補題 3.12 任意の $T\geq 0$ を固定するとき，$\{M(s)\,;\,0\leq s\leq T\}$ が有界な $(\mathcal{F}_t^B)$-マルチンゲールで，任意の $N\in\mathcal{N}$ に対して

$$\langle M,N\rangle(s)=0 \quad a.s.$$

が任意の $0\leq s\leq t(\leq T)$ で成り立つならば，$M(s)=0, a.s., 0\leq s\leq t$ となる．

最初に，$M(t)=0,\ a.s.$ ならば $M^2(s)$ は劣マルチンゲールだから，

$$E(M(s)^2)\leq E(M(t)^2)=0$$

となり，$M(s)=0,\ a.s.$ が $0\leq s\leq t$ で成り立つことに注意する．定数 $K>0$ を $|M(t)|\leq K$ が a.s. で成り立つようにとる．

$$H(\omega)=1+\frac{M(t,\omega)}{2K}$$

と置くと，これは正の値を取り，有界である．$A\in\mathcal{F}_t^B$ のとき，

$$P_H(A)=E(H1_A)$$

という式で新しい確率 P_H を定義すると，$N\in\mathcal{N},\sigma\in\mathcal{S}_t$ ならば，

$$\begin{aligned}
E_H\left(N(\sigma)\right)&=E(N(\sigma)H)=E\left(N(\sigma)E(H\mid\mathcal{F}_\sigma)\right)\\
&=E\left(N(\sigma)E\left(1+\frac{M(t)}{2K}\right)|\mathcal{F}_\sigma\right)\\
&=E(N(\sigma))+\frac{1}{2K}E(N(\sigma)M(\sigma))=0
\end{aligned}$$

最後の等式は $\langle M,N\rangle(t)=0\quad a.s.$ による．したがって補題 3.11 により N は P_H でみて $(\mathcal{F}_t^B)$-マルチンゲールである．特に，$B(t),B(t)^2-t$ は P_H で見て $(\mathcal{F}_t^B)$-マルチンゲール．これは P_H で見ても $\langle B\rangle(t)=t$ であることを言っている．したがって定理 3.9 により，$B(t)$ は P_H で見ても $(\mathcal{F}_t^B)$-Brown

運動．つまり，$a_i < b_i$ を $1 \le i \le n$ について与えたとき，$0 < s_1 < \ldots < s_n$ のとき

$$P_H(B(s_1) \in [a_1, b_1], \ldots, B(s_n) \in [a_n, b_n]) = P(B(s_1) \in [a_1, b_1], \ldots, B(s_n) \in [a_n, b_n])$$

を意味するが，これは

$$P_H(A) = P(A) \quad \forall\ A \in \mathcal{F}_t^B$$

を意味している[1]．P_H の定義に戻ると，

$$P_H(A) = P(A) + \frac{1}{2K} E(M(t) 1_A)$$

で，これが $P(A)$ に等しいので，

$$0 = E(M(t) 1_A) = \int_A M(t) P(d\omega)$$

が任意の $A \in \mathcal{F}_t^B$ に対して成り立つ．$M(t)$ は $\mathcal{F}_t^B$-可測なので，これは $M(t) = 0\ a.s.$ を意味する．□

この結果は 2 乗可積分なマルチンゲールにまで拡張できる事が知られている．

[1]単調族定理による．