定理 3.9 **[再掲]** $M(t)$ を 2 乗可積分なマルチンゲールとする．このとき，

$$\langle M\rangle(t) = t$$

が任意の $t \geq 0$ で成り立つならば，$M(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動である．

定理 3.10 ((再掲) マルチンゲールの表現定理) $B(t)$ を $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動とし，

$$\mathcal{F}_t^B := \sigma\{B(s)\,;\,0 \leq s \leq t\}$$

と置く．$M_1(t),\ldots,M_n(t)$ が 任意の $1 \leq i \leq n$ について $M_i(0) = 0$ を満たす 2 乗可積分な $(\mathcal{F}_t^B)$-マルチンゲールならば，ある $\Phi_i(s) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t^B)$ がとれて，

$$M_i(t) = \int_0^t \Phi(s)dB(s) \qquad 1 \leq i \leq n$$

という式が成り立つ．ただし，

$$\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t^B) := \left\{\Phi\,;\,(\mathcal{F}_t^B) - \text{発展的可測}, E(\int_0^T \Phi(s)^2 ds) < \infty,\ T > 0\right\}$$

とする．

補題 3.11 **[再掲]** $X(t)$ が $(\mathcal{F}_t)$-適合で可積分な確率過程で $X(0) = 0$ を満たすとする．任意の $T > 0$ に対して

$$\mathcal{S}_T := \{\tau\,;\,(\mathcal{F}_t) - \text{停止時刻}, \tau \leq T \quad a.s.\ \}$$

とおくとき，任意の $T > 0$ と任意の $\tau \in \mathcal{S}_T$ に対して

$$E(X(\tau)) = 0$$

となるならば，$X(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール．

補題 3.12 **[再掲]** 任意の $T \geq 0$ を固定するとき，$\{M(s)\,;\,0 \leq s \leq T\}$ が有界な $(\mathcal{F}_t^B)$-マルチンゲールで，任意の $N \in \mathcal{N}$ に対して

$$\langle M, N\rangle(s) = 0 \quad a.s.$$

が任意の $0 \leq s \leq t(\leq T)$ で成り立つならば，$M(s) = 0, a.s., 0 \leq s \leq t$ となる．

マルチンゲールの表現定理の証明　$M(t)$ を 2 乗可積分な $(\mathcal{F}_t^B)$-マルチンゲールとする．$t>0$ を任意に固定して，

$$\mathcal{N}_t := \{\int_0^t \psi(s,\omega)dB(s)\,;\,\psi\in\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t^B)\}$$

とおく．$\mathcal{N}_t$ の元は 2 乗可積分なので，$L^2(\Omega)$ の閉部分空間[1]．$\mathcal{N}_t$ の $L^2(\Omega)$ での直交補空間を $\mathcal{N}_t^\perp$ と書く．このとき

$$M(t)=\int_0^t \psi(s)dB(s)+N$$

と分解できる．$\int_0^t \psi(s)dB(s)\in\mathcal{N}_t$, $N\in\mathcal{N}_t^\perp$ である．$s<t$ に対して

$$N(s)=E(N\mid\mathcal{F}_s^B)$$

は 2 乗可積分な $(\mathcal{F}_s^B)$-マルチンゲールだから，任意の $L\in\mathcal{N}$ に対して

$$\langle N,L\rangle(s)=0,\quad 0\le s\le t \tag{3.1}$$

を示せば補題 3.12 により，$N(s)=0$ が $0\le s\le t$ で成り立ち，とくに $N(t)=N=0$ となる．これより

$$M(t)=\int_0^t \psi(s)dB(s)\in\mathcal{N}_t$$

とかけていることがわかる．(3.1) を示すには $M(s)N(s)$ が $\mathcal{F}_t^B$-マルチンゲールであることを言えば良い．補題 3.11 により，任意の $\tau\in\mathcal{S}_t$ に対して

$$E\left[N(\tau)L(\tau)\right]=0$$

を言えば良い．$N(\tau)=E(N\mid\mathcal{F}_\tau^B)$ だから，

$$E\left[N(\tau)L(\tau)\right]=E(NL(\tau))=E\left(NL(\tau\wedge t)\right)$$

ところで，$L\in\mathcal{N}$ だったので，ある $\Phi\in\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t^B)$ に対して

$$L(s)=\int_0^s \Phi(u)dB(u)$$

[1]確率積分の等長性により，$\int_0^t \psi_n(s)dB(s)$ が $L^2(\Omega)$ の Cauchy 列ならば ψ_n は $\mathcal{L}^2(\mathcal{F}_t^B)$ を $[0,t]$ に制限したときの Cauchy 列となる

と書ける．

$$L(\tau \wedge t) = \int_0^t 1_{\{\tau \geq t\}}(s)\Phi(s)dB(s)$$

だから，$L(\tau \wedge t) \in \mathcal{N}_t$ となり，

$$E\left[N(\tau)L(\tau)\right] = E(NL(\tau \wedge t)) = 0.$$

□

3.3 Girsanov の定理とドリフトつき Brown 運動

$B(t)$ を $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動とするとき，

$$\int_0^T \theta(t)^2 dt < \infty \quad a.s.$$

となる $(\mathcal{F}_t)$-適合過程 $\theta(t)$ に対して

$$Z(t) = \exp\left\{\int_0^t \theta(s)\,dB(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta(s)^2\,ds\right\}$$

が $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールであるとする．

$$P_T(A) = E\left[Z(T)\,;\,A\right] \tag{3.2}$$

によって定義した $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ 上の確率測度 P_T について，任意の $0 \leq t \leq T$ に対して $A \in \mathcal{F}_t$ のとき

$$P_T(A) = E\left[Z(T)\,;\,A\right] = E\left[Z(t)\,;\,A\right]$$

が $Z(t)$ のマルチンゲール性から得られる．Girsanov の定理はこの性質に基づくもので次のように述べられる．

定理 3.13（Girsanov の定理） $(\Omega, \mathcal{F}_T, P_T)$ で考えたとき $W(t) = B(t) - \int_0^t \theta(s)\,ds$ は $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動になる．

証明 $\theta = a$（定数）という簡単な場合にのみ証明を与えておく．完全な証明は連続マルチンゲールの表現定理に基づく．最初に $\theta = a$ の場合は

$Z(t) = \exp\{aB(t) - \frac{a^2}{2}t\}$ は

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T Z(t)^2 dt\right] &= \int_0^T E\left[\exp\left\{2aB(t) - a^2 t\right\}\right] dt \\ &= \int_0^T \exp\{a^2 t\} dt < \infty \end{aligned}$$

となり，これは $\mathcal{L}^2$ の元であることに注意する．

次に $e^{i\xi W(t) + \frac{\xi^2}{2}t} Z(t)$ が確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_T, P_T)$ で $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールになることを確かめる．伊藤の公式により，

$$\begin{aligned} e^{i\xi W(t) + \frac{\xi^2}{2}t} Z(t) &= 1 + \int_0^t (i\xi) e^{i\xi W(s) + \frac{\xi^2}{2}s} Z(s)\, dW(s) \\ &\quad + a \int_0^T e^{i\xi W(s) + \frac{\xi^2}{2}s} Z(s) dB(s) \\ &\quad + ia\xi \int_0^T e^{i\xi W(s) + \frac{\xi^2}{2}s} Z(s) ds \\ &= 1 + \int_0^T (i\xi + a) e^{i\xi W(s) + \frac{\xi^2}{2}s} Z(s)\, dB(s) \end{aligned}$$

となり，これは P について $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール．したがって $t > s, A \in \mathcal{F}_s$ のとき

$$\begin{aligned} E_T\left[e^{i\xi W(t) + \frac{\xi^2}{2}t}\, 1_A\right] &= E\left[e^{i\xi W(t) + \frac{\xi^2}{2}t} Z(t)\, 1_A\right] \\ &= E\left[e^{i\xi W(s) + \frac{\xi^2}{2}s} Z(s)\, 1_A\right] \\ &= E_T\left[e^{i\xi W(s) + \frac{\xi^2}{2}s}\, 1_A\right] \end{aligned}$$

となり，$e^{i\xi W(t) + \frac{\xi^2}{2}t}$ は P_T について $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール．よって

$$E_T\left[e^{i\xi W(t) + \frac{\xi^2}{2}t} \middle| \mathcal{F}_s\right] = e^{i\xi W(s) + \frac{\xi^2}{2}s} \quad \text{a.s.},$$

すなわち

$$E_T\left[e^{i\xi(W(t) - W(s))} \middle| \mathcal{F}_s\right] = e^{\frac{\xi^2}{2}(t-s)} \quad \text{a.s.}$$

となり，P_T でみると $W(t) - W(s)$ は $\mathcal{F}_s$ と独立で平均 0 分散 $t - s$ のガウス分布に従っており $W(t)$ は $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動である． □