第2章　Brown 運動に関する確率積分

2.1　条件付き期待値

条件付きで確率を議論することはよくある．直感的にはよく分かる話なのだが，数学的な意味づけは確率論の中でも難しい話の一つとして知られている．その中では簡単な話の部類に属するのが条件付き期待値である．まずは定義から始めよう．確率空間は $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ とする．

定義 2.1 確率変数 X は，可積分つまり $E|X| < \infty$ を満たすとし，$\mathcal{G}$ は $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族とする．この時，部分的な情報である $\mathcal{G}$ の情報が与えられた下での X の**条件付き期待値** $E(X \mid \mathcal{G})$ は，次の二つの条件を満たす確率変数である．

(i) $E(X \mid \mathcal{G})$ は $\mathcal{G}$-可測な確率変数，*i.e.,* 任意の実数 a に対して

$$\{\omega \in \Omega\,;\, E(X \mid \mathcal{G})(\omega) \leq a\} \in \mathcal{G}.$$

(ii) 任意の $B \in \mathcal{G}$ に対して

$$\int_B E(X \mid \mathcal{G})(\omega) P(d\omega) = \int_B X(\omega) P(d\omega) \tag{2.1}$$

これで条件付き期待値 $E(X \mid \mathcal{G})$ がちゃんと決まっていることを確かめておこう．

補題 2.1 $\mathcal{G}$-可測な確率変数 H, K が任意の $B \in \mathcal{G}$ に対して

$$\int_B H(\omega) P(d\omega) = \int_B K(\omega) P(d\omega)$$

を満たすならば，確率 1 で $H(\omega) = K(\omega)$ である．

もし， H も K も $\mathcal{G}$-可測で，(2.1) を満たしているとすると補題の条件を満たしているので，確率 1 で $H(\omega) = K(\omega)$ であることが分かる．従って，$E(X \mid \mathcal{G})(\omega)$ はどのようにとっても違いは確率 0 の集合でしか現れない．したがってこの様な確率変数のうちで都合のよいものを取っておけば良い．特に，X が $\mathcal{G}$-可測なときは，X 自身が自明に (2.1) を満たすので， $E(X \mid \mathcal{G}) = X$ である．

練習問題 2.1 上の補題を証明してみよう．

(i) まず $\varepsilon > 0$ を任意に与えて，$A_\varepsilon = \{\omega \in \Omega; H(\omega) \geq K(\omega) + \varepsilon\}$ とおくとき，$P(A) = 0$ を示せ．

(ii) $\varepsilon \to 0$ とすることで $P(\{\omega \in \Omega; H(\omega) > K(\omega)\}) = 0$ を示せ．

(iii) H と K の役割を入れ替えて補題の証明を完成せよ．

2.2 離散時間のマルチンゲール

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で，$\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族の増加列 $(\mathcal{F}_n)$ を**フィルトレーション**と呼ぶ．

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_n \subset \ldots$$

である．フィルトレーションのことを直感的に増大情報系とも呼ぶ．以下では，簡単のため $\mathcal{F}_n$ や $\mathcal{F}$ はすべて $P(N) = 0$ となる集合 N を要素として含むものとする．

定義 2.2 可積分な確率変数の列 $\{X(n)\}_{n\geq 1}$ が以下の条件を満たすとき，これを $(\mathcal{F}_n)$-**マルチンゲール**という．

(i) 各 $n \geq 1$ について，$X(n)$ は $\mathcal{F}_n$-可測．このとき $\{X(n)\}$ は $(\mathcal{F}_n)$-**適合**と言う．

(ii) 任意の $n \geq 1$ について

$$E(X(n+1) \mid \mathcal{F}_n) = X(n) \quad a.s. \tag{2.2}$$

注意 2.2 (2.2) は条件付き期待値の定義（定義 2.1）から

$$\int_B X(n+1,\omega)P(d\omega) = \int_B X(n,\omega)P(d\omega) \quad \forall B \in \mathcal{F}_n$$

という式と同じである．したがって，$n \geq m$ のとき $\mathcal{F}_n \supset \mathcal{F}_m$ であるので，

$$\int_B X(n,\omega)P(d\omega) = \int_B X(m,\omega)P(d\omega) \quad \forall B \in \mathcal{F}_m$$

という式とも同値である．

定義 2.3 $\{0,1,2,\ldots\} \cup \{\infty\}$ に値を取る確率変数 T が $(\mathcal{F}_n)$-**停止時刻**であるとは，任意の $n \geq 0$ に対して

$$\{\omega \in \Omega\,;\, T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

となるときに言う．

練習問題 2.2 T が $(\mathcal{F}_n)$-停止時刻であることは，任意の $n \geq 0$ に対して

$$\{\omega \in \Omega\,;\, T(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$$

と同値であることを証明せよ．

T が $(\mathcal{F}_n)$-停止時刻の時，$T \wedge n = \min\{T, n\}$ も $(\mathcal{F}_n)$-停止時刻である．実際，

$$\{\omega \in \Omega\,;\, T(\omega) \wedge n = k\} = \begin{cases} \{\omega \in \Omega\,;\, T(\omega) = k\} \in \mathcal{F}_k & n \geq k \text{ のとき,} \\ \emptyset \in \mathcal{F}_k & n < k \text{ のとき} \end{cases}$$

となるからである．また，T に対して，

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}\,;\, A \cap \{\omega \in \Omega\,;\, T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n \quad \forall n \geq 0\}$$

と定めると，$\mathcal{F}_T$ は σ-加法族になる．実際，$(\mathcal{F}_n)$-停止時刻の定義から

$$\Omega \cap \{\omega \in \Omega\,;\, T(\omega) \leq n\} = \{\omega \in \Omega\,;\, T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

となり，$\Omega \in \mathcal{F}_T$ であり，$A \in \mathcal{F}_T$ ならば，

$$A^c \cap \{\omega \in \Omega\,;\, T(\omega) \leq n\} = \{\omega \in \Omega\,;\, T(\omega) \leq n\} \setminus \big(A \cap \{\omega \in \Omega\,;\, T(\omega) \leq n\}\big) \in \mathcal{F}_n$$

なので，$A^c \in \mathcal{F}_T$ でもある．また，$A_j, j \geq 1$ が $\mathcal{F}_T$ の元だとすると，

$$\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) \cap \{\omega \in \Omega\,;\, T(\omega) \leq n\} = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \cap \{\omega \in \Omega\,;\, T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$$

なので，$\cup_{j\geq 1} A_j \in \mathcal{F}_T$ も成り立つからである．この $\mathcal{F}_T$ については良い性質がある．

補題 2.3 S, T を $(\mathcal{F}_n)$-停止時刻として，$S \leq T\ a.s.$ となるならば，$\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$ が成り立つ．

証明　$A \in \mathcal{F}_S \Rightarrow A \in \mathcal{F}_T$ を言う．$A \in \mathcal{F}_S$ としよう．任意の $n \geq 0$ に対してこのとき $S \leq T$ だから

$$A \cap \{\omega \in \Omega\,;\, T(\omega) \leq n\} = A \cap \{\omega \in \Omega\,;\, S(\omega) \leq n\} \cap \{\omega \in \Omega\,;\, T(\omega) \leq n\}.$$

$A \in \mathcal{F}_S$ なので，$A \cap \{\omega \in \Omega\,;\, S(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ であり，T は $\{\mathcal{F}_n\}$-停止時刻だから $\{\omega \in \Omega\,;\, T(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ となり，上式の右辺は $\mathcal{F}_n$ に入る．従って，$A \in \mathcal{F}_T$ である．

注意 2.4 記号が煩雑になるので，事象を表すときは $\omega \in \Omega$ など，ω **に関する表示は省略することにする．** 例えば，$\{\omega \in \Omega\,;\, S(\omega) \leq n\}$ は $\{S \leq n\}$ と略記し，$\{\omega \in \Omega\,;\, X(\omega) \in B\}$ は単に $\{X \in B\}$ と書くことにする

補題 2.5 確率変数列 $\{X(n)\}_{n\geq 0}$ は $\{\mathcal{F}_n\}$-適合とする．さらに $P(T < \infty) = 1$ とすると，

$$X(T, \omega) = X(T(\omega), \omega)$$

は $\mathcal{F}_T$-可測な確率変数である．

証明　任意の実数 a に対して $\{X(T) \leq a\} \in \mathcal{F}_T$ を言えば良い．

$$\{X(T) \leq a\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{X(T) \leq a\} \cap \{T = n\} = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{X(n) \leq a\} \cap \{T = n\}$$

なので，任意の $N \geq 0$ に対して

$$\{X(T) \leq a\} \cap \{T \leq N\} = \bigcup_{n=0}^{N} \{X(n) \leq a\} \cap \{T = n\}$$

となる．仮定により，各 $n \geq 0$ に対して $\{X(n) \leq a\}$ も $\{T = n\}$ も $\mathcal{F}_n$ の元であるので，上式右辺は $\mathcal{F}_N$ の元である．これは $\{X_T \leq a\} \in \mathcal{F}_T$ を意味する．