

2.3 連続時間のマルチンゲール

(Ω, \mathcal{F}, P) を確率空間とし, フィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ が右連続性:

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{u > t} \mathcal{F}_u$$

をみたすものとする.

定義 2.5 フィルトレーション (\mathcal{F}_t) をもつ確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ において, 確率過程 $X(t) = X(t, \omega)$, $t \geq 0$ が (\mathcal{F}_t) -マルチンゲールであるとは,

(i) $E[|X(t)|] < \infty, \quad \forall t \geq 0,$

(ii) 任意の $t > s \geq 0$ に対して

$$E[X(t) | \mathcal{F}_s] = X(s) \quad P - a.s. \quad (2.6)$$

が成立する時にいう.

注意 上の条件 (ii) は次の (ii)' と同値である.

(ii)' 任意の $t > s \geq 0$ と任意の $B \in \mathcal{F}_s$ に対して

$$\int_B X(t, \omega) P(d\omega) = \int_B X(s, \omega) P(d\omega) \quad (2.7)$$

定義 2.6 $\tau : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ が, (\mathcal{F}_t) -停止時刻であるとは, 任意の $t \geq 0$ に対して $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ が成り立つときに言う. (\mathcal{F}_t) -停止時刻 τ に対して時刻 τ までの情報の全体 \mathcal{F}_τ を

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F}; \text{任意の } t \geq 0 \text{ に対して } A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

で定める.

注意 2.9 離散時間のときと同じ理由で \mathcal{F}_τ は σ -加法族である.

命題 2.10 τ, T を二つの (\mathcal{F}_t) -停止時刻とし, $\tau \leq T, a.s.$ とする. このとき

$$\mathcal{F}_T \supset \mathcal{F}_\tau$$

である.

この証明も離散時間のときと同様 .

例 2.1 $X(t)$ を右連続な確率過程で, (\mathcal{F}_t) -適合, つまり任意の $t \geq 0$ に対して $X(t)$ は \mathcal{F}_t -可測とする . このとき, $A \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ が開集合ならば

$$\tau_A = \inf\{t \geq 0; X(t) \in A\}$$

は (\mathcal{F}_t) -停止時刻になる . 実際, A が開集合ならば右連続性から

$$\{\tau_A < t\} = \bigcup_{s < t, s: \text{有理数}} \{X(s) \in A\} \in \mathcal{F}_t$$

で, これから \mathcal{F}_t の右連続性により

$$\{\tau_A \leq t\} = \bigcap_{n \geq 1} \{\tau_A < t + \frac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$$

となり, 確かに τ_A は (\mathcal{F}_t) -停止時刻 . 少し面倒だが同様に A が閉集合のときも τ_A は (\mathcal{F}_t) -停止時刻になる .

定理 2.11 (Doob の任意抽出定理) $X(t)$ を \mathcal{F}_t -劣マルチンゲールとすると, τ_1, τ_2 がともに有界な (\mathcal{F}_t) -停止時刻で $\tau_1 \leq \tau_2$ *a.s.* であるならば,

$$E[X(\tau_2) | \mathcal{F}_{\tau_1}] \geq X(\tau_1) \quad \textit{a.s.}$$

が成り立つ .

マルチンゲールのときは上の不等式は等式になる .

Brown 運動のマルチンゲール性

後の便宜のためにフィルトレーション (\mathcal{F}_t) に関する Brown 運動を定義する .

定義 2.7 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, P)$ において, 確率過程 $B(t)$ が, (\mathcal{F}_t) -Brown 運動であるとは,

- (i) 任意の $t \geq 0$ で $B(t)$ は \mathcal{F}_t -可測 (これを (\mathcal{F}_t) -適合という) .
- (ii) $B(0) = 0$ $P - a.s.$

- (iii) 任意の $t > s \geq 0$ に対して, $B(t) - B(s)$ は \mathcal{F}_t と独立で, 平均 0, 分散 $t - s$ の Gauss 分布となる.

定理 2.12 (\mathcal{F}_t)-Brown 運動 $B(t)$ は $P - a.s.$ で次を満たす. $0 \leq s < t$ とする.

- (i) $E(B(t) | \mathcal{F}_s) = B(s)$, つまり $B(t)$ は (\mathcal{F}_t)-マルチンゲール.
- (ii) $E(B(t)^2 - t | \mathcal{F}_s) = B(s)^2 - s$, つまり $B(t)^2 - t$ は (\mathcal{F}_t)-マルチンゲール.
- (iii) $E\left[e^{B(t) - \frac{t}{2}} | \mathcal{F}_s\right] = e^{B(s) - \frac{s}{2}}$, つまり $M_t = e^{B(t) - \frac{t}{2}}$ は (\mathcal{F}_t)-マルチンゲール.

練習問題 2.3 マルチンゲールの定義に従い, (\mathcal{F}_t)-Brown 運動の定義を用いて定理 2.12 を証明せよ.