

2.4 階段過程の確率積分

定義 2.8 $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t))$ に対し, (\mathcal{F}_t) -適度な確率過程 $\Phi(t)$ が階段型とは, 自然数 $n, 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ と有界な確率変数列 $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ があって,

(i) 各 $\xi_j (1 \leq j \leq n)$ は $\mathcal{F}_{t_{j-1}}$ -可測, ξ_0 は \mathcal{F}_0 -可測,

(ii) $\Phi(t) = 1_{\{0\}}(t)\xi_0 + \sum_{j=1}^n 1_{(t_{j-1}, t_j]}(t)\xi_j$

の 2 条件をみたすときにいう.

階段型確率過程の全体を \mathcal{L}_0 で表す.

定義 2.9 $\Phi \in \mathcal{L}_0$ に対して連続な確率過程 $I(\Phi)(t)$ を

$$I(\Phi)(t) = \sum_{j=1}^n \xi_j (B(t \wedge t_j) - B(t \wedge t_{j-1})) \quad t \geq 0 \quad (2.8)$$

によって与える. ただし, $t \wedge s = \min\{s, t\}$ と約束する. $I(\Phi)(t)$ を Φ の Brown 運動による確率積分とよび,

$$\int_0^t \Phi(s) dB(s)$$

とも書く.

定理 2.13 (確率積分の性質) $\Phi \in \mathcal{L}_0$ とする. このとき, 以下が成り立つ.

(i) ((\mathcal{F}_t) -適合性) 任意の $t \in [0, \infty)$ に対して $I(\Phi)(t)$ は \mathcal{F}_t -可測

(ii) (連続性) $I(\Phi)(t)$ は t について連続 *a.s.*

(iii) (線形性)

$$I(\alpha\Phi + \beta\Psi)(t) = \alpha I(\Phi)(t) + \beta I(\Psi)(t) \quad a.s.$$

(iv) (マルチンゲール性)

$$E(I(\Phi)(t) | \mathcal{F}_s) = I(\Phi)(s) \quad a.s.$$

(v) (等長性)

$$E((I(\Phi)(t))^2) = E \int_0^t \Phi(s)^2 ds$$

さらに一般に $t > v$ のとき,

$$E[(I(\Phi)(t))^2 - E \int_0^t \Phi(s)^2 ds | \mathcal{F}_v] = I(\Phi)(v)^2 - E \int_0^v \Phi(s)^2 ds$$

証明 (i) いま, 階段過程を

$$\Phi(t) = 1_{\{0\}}(t)\xi_0 + \sum_{j=1}^n 1_{(t_{j-1}, t_j]}(t)\xi_j$$

と書いておく. $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_n < \infty$ である. 場合分けをして示す.

まず定義から $I(\Phi)(0) = 0$ であり, これは定数なので \mathcal{F}_0 -可測.

つぎに $t_{i-1} < t \leq t_i$ となる $i \leq n$ があるとき,

$$I(\Phi)(t) = \sum_{j=1}^{i-1} \xi_j (B(t_j) - B(t_{j-1})) + \xi_i (B(t) - B(t_{i-1}))$$

となるが, 右辺はどれも \mathcal{F}_t -可測.

最後に $t > t_n$ のとき,

$$I(\Phi)(t) = \sum_{j=1}^n \xi_j (B(t_j) - B(t_{j-1}))$$

となり, $t > t_n$ よりこれは \mathcal{F}_t -可測.

(ii) 上の計算から $t \geq t_n$ のときは $I(\Phi)(t) = I(\Phi)(t_n)$ だから同じ値をとりつづけ, 連続.

$t_{i-1} < t < t_i$ のとき, $s_m \rightarrow t$ となる s_m の列も同じ区間に入るとして良い. このとき

$$I(\Phi)(t) - I(\Phi)(s_m) = \xi_i (B(t) - B(s_m))$$

となり, Brown 運動の連続性から右辺は $s_m \rightarrow t$ のとき 0 に近づく.

$t = t_i$ のとき $s_m < t_i$ ならば上と同じ議論ができる. $s_m > t_i$ で $s_m \rightarrow t$ のとき, $t_i < s_m < t_{i+1}$ として良い. このとき

$$I(\Phi)(t) - I(\Phi)(s_m) = -\xi_{i+1} (B(s_m) - B(t_i))$$

これも 0 に近づく .

(iii) 明らか

(vi) 宿題

(v) 後半を証明すれば, $v = 0$ とした式により

$$E \left[(I(\Phi)(t))^2 - E \int_0^t \Phi^2(s) ds \mid \mathcal{F}_0 \right] = 0$$

この式の期待値をとれば前半が示せる .

まず $t > v > t_n$ のとき

$$I(\Phi)(t) - I(\Phi)(v) = 0, \quad \Phi(t) - \Phi(v) = 0$$

だから, この式は明らかに成立 . $v \leq t_n$ として良い . 今, $t_{i-1} < v \leq t_i$ とする . $t \geq t_n$ ならば,

$$I(\Phi)(t) - I(\Phi)(v) = \sum_{j=i}^{n-1} \xi_j (B(t_{j+1}) - B(t_j)) + \xi_i (B(t_i) - B(v))$$

となり,

$$\begin{aligned} & E \left[(I(\Phi)(t))^2 \mid \mathcal{F}_v \right] \\ &= E \left[(I(\Phi)(t) - I(\Phi)(v))^2 + 2I(\Phi)(v)(I(\Phi)(t) - I(\Phi)(v)) \mid \mathcal{F}_v \right] + (I(\Phi)(v))^2. \end{aligned}$$

面倒だが,

$$\begin{aligned} (I(\Phi)(t) - I(\Phi)(v))^2 &= \sum_{j=i}^{n-1} \xi_{j+1}^2 (B(t_{j+1}) - B(t_j))^2 + \xi_i^2 (B(t_i) - B(v))^2 \\ &\quad + 2\xi_i (B(t_i) - B(v)) \sum_{j=i}^{n-1} \xi_{j+1} (B(t_{j+1}) - B(t_j)) \\ &\quad + 2 \sum_{i \leq j < k \leq n-1} \xi_j (B(t_{j+1}) - B(t_j)) \xi_k (B(t_{k+1}) - B(t_k)) \end{aligned}$$

と分けておく . ここで, $t_j \geq v$ のとき x_{j+1} は \mathcal{F}_{t_j} -可測なので,

$$\begin{aligned} E \left(\xi_{j+1}^2 (B(t_{j+1}) - B(t_j))^2 \mid \mathcal{F}_{t_j} \right) &= \xi_{j+1}^2 E \left((B(t_{j+1}) - B(t_j))^2 \right) = \xi_{j+1}^2 (t_{j+1} - t_j) \\ E \left(\xi_i^2 (B(t_i) - B(v))^2 \mid \mathcal{F}_v \right) &= x_i^2 (t_i - v) \end{aligned}$$

となり，右辺第 1 項と第 2 項の和は

$$E \left(\int_v^t \Phi^2(s) ds \mid \mathcal{F}_s \right)$$

に等しい．一方， $j > i$ のとき

$$\begin{aligned} & E(\xi_i(B(t_i) - B(v))\xi_{j+1}(B(t_{j+1}) - B(t_j)) \mid \mathcal{F}_{t_j}) \\ &= \xi_i(B(t_i) - B(v))\xi_{j+1}E(B(t_{j+1}) - B(t_j)) = 0 \end{aligned}$$

となり，この式の \mathcal{F}_v での条件付き期待値をとると 0 となる．同様に $k > j > i$ のとき

$$\begin{aligned} & E(\xi_j(B(t_{j+1}) - B(t_j))\xi_k(B(t_{k+1}) - B(t_k)) \mid \mathcal{F}_{t_k}) \\ &= \xi_j(B(t_{j+1}) - B(t_j))\xi_kE(B(t_{k+1}) - B(t_k)) = 0 \end{aligned}$$

なので，まとめると

$$E((I(\Phi)(t) - I(\Phi)(v))^2 \mid \mathcal{F}_v) = E \left(\int_v^t \Phi(s)^2 ds \mid \mathcal{F}_v \right)$$

となる．一方，

$$E(I(\Phi)(v)(I(\Phi)(t) - I(\Phi)(v)) \mid \mathcal{F}_v) = I(\Phi)(v)E((I(\Phi)(t) - I(\Phi)(v)) \mid \mathcal{F}_v) = 0$$

が (vi) より言える．したがって

$$E((I(\Phi)(t))^2 \mid \mathcal{F}_v) = (I(\Phi)(v))^2 + E \left(\int_v^t \Phi(s)^2 ds \mid \mathcal{F}_v \right).$$

これは求める式である． $t \leq t_n$ のときも同様．