付 録A　マルチンゲールに関する補足

自明のこととして使ってきたことだが，本来は証明が必要な事柄をまとめて証明しておく．確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ は固定しておく．

A.1　条件付き期待値の性質

定理 A.1 $\mathcal{G}$ は $\mathcal{F}$ の部分 σ-加法族とする．

(i) (線形性) $a, b \in \mathbb{R}$ のとき，X, Y が可積分な確率変数ならば

$$E(aX + bY \mid \mathcal{G}) = aE(X \mid \mathcal{G}) + bE(Y \mid \mathcal{G})$$

(ii) (正値性) X が可積分な確率変数のとき，$X \geq 0 \ \ a.s.$ ならば $E(X \mid \mathcal{G}) \geq 0 \ \ a.s.$ したがって $X \geq Y \ \ a.s.$ で X, Y が可積分ならば $EX \geq EY$ が成り立つ．

(iii) X が可積分な確率変数のとき，

$$|E(X \mid \mathcal{G})| \leq E(|X| \mid \mathcal{G})$$

これより，特に $E(X \mid \mathcal{G})$ も可積分．

(iv) X が有界で $\mathcal{G}$-可測，Y が可積分ならば

$$E(XY \mid \mathcal{G}) = XE(Y \mid \mathcal{G})$$

つまり，**$\mathcal{G}$-可測関数は $\mathcal{G}$ による条件付き期待値をとる際には定数扱いができる．** この式は可積分性を Y, XY の二つが可積分という条件まで緩めることができる．

(v) (Jensen の不等式) φ を凸関数とし，$X, \varphi(X)$ がともに可積分ならば

$$E(\varphi(X) \mid \mathcal{G}) \geq \varphi(E(X \mid \mathcal{G})) \quad a.s.$$

(vi) (単調収束定理）$0 \leq X_1 \leq X_2 \leq \ldots \leq X_n \nearrow X$ が a.s. で成り立っているとき，X と各 X_n が可積分ならば

$$\lim_{n\to\infty} E(X_n \mid \mathcal{G}) = E(X \mid \mathcal{G})$$

(vii) (Fatou の補題) $X_n \geq 0\, a.s.$ が任意の $n \geq 1$ で成り立っているとき，各 X_n と $\liminf_{n\to\infty} X_n$ が可積分ならば

$$\liminf_{n\to\infty} E(X_n \mid \mathcal{G})$$

(viii) (Lebesgue の収束定理) ある可積分な確率変数 Z が $|X_n| \leq Z$ を任意の $n \geq 1$ に対して a.s. で満たしており，$X_n \to X\, a.s.$ であるならば

$$E(X_n \mid \mathcal{G}) \to E(X \mid \mathcal{G})$$

証明　(i) 右辺は $\mathcal{G}$-可測であるので，任意の $B \in \mathcal{G}$ に対して，

$$\begin{aligned}\int_B \left[aE(X \mid \mathcal{G}) + bE(Y \mid \mathcal{G})\right] P(d\omega) &= a\int_B E(X \mid \mathcal{G})P(d\omega) + b\int_B E(Y \mid \mathcal{G})P(d\omega) \\ &= a\int_B X(\omega)P(d\omega) + b\int_B Y(\omega)P(d\omega) \\ &= \int_B \left[aX(\omega) + bY(\omega)\right] P(d\omega)\end{aligned}$$

となるので，右辺が $aX + bY$ の $\mathcal{G}$ による条件付き期待値であることがわかる．

(ii) $B_n = \{\omega \in \Omega\,;\, E(X \mid \mathcal{G}) \leq -\frac{1}{n}\}$ と置く．$B_n \in \mathcal{G}$ なので，

$$0 \leq \int_{B_n} X(\omega)P(d\omega) = \int_{B_n} E(X \mid \mathcal{G})P(d\omega) \leq -\frac{1}{n}P(B_n)$$

となり $P(B_n) = 0$ でなければならない．$n \to \infty$ として

$$P(\{\omega \in \Omega\,;\, E(X \mid \mathcal{G})(\omega) < 0) = 0$$

つまり，$E(X \mid \mathcal{G}) \geq 0$ が a.s. で成り立つ．線形性を使うと $X \geq Y$ のとき，$X - Y \geq 0$ より

$$E(X \mid \mathcal{G}) - E(Y \mid \mathcal{G}) = E(X - y \mid \mathcal{G}) \geq 0$$

が a.s. で成立．
(iii) $-|X| \leq X \leq X$ だから，線形性と正値性により

$$-E(|X| \mid \mathcal{G}) \leq E(X \mid \mathcal{G}) \leq E(|X| \mid \mathcal{G})$$

となる．
(iv) $X = 1_C$ となる $C \in \mathcal{G}$ がある時をまず考える．任意の $B \in \mathcal{G}$ に対して

$$\int_B X(\omega)Y(\omega)P(d\omega) = \int_{B\cap C} Y(\omega)P(d\omega)$$

に注意すると，右辺は

$$\int_{B\cap C} E(Y \mid \mathcal{G})P(d\omega) = \int_B X(\omega)E(Y \mid \mathcal{G})P(d\omega)$$

と変形できて，求める式を得る．

線形性により，$X = \sum_{i=1}^n a_i 1_{C_i}$ のとき (ただし，$a_i \in \mathbb{R}$, $C_i \in \mathcal{G}$ が任意の i について成り立つものとする)，

$$E(XY \mid \mathcal{G}) = E(\sum_i a_i 1_{c_i} Y \mid \mathcal{G}) = \sum_i a_i E(1_{C_i} Y \mid \mathcal{G}) = \sum_i a_i 1_{C_i}(Y \mid \mathcal{G}) = XE(Y \mid \mathcal{G})$$

となり，やはり正しい．

$X, Y \geq 0$ のとき，X_n を

$$X_n(\omega) = \begin{cases} \frac{k}{2^n} & \text{if } \frac{k}{2^n} \leq X < \frac{k+1}{2^n}, \quad k \leq n2^n, \\ 0 & \text{otherwise}, \end{cases}$$

で定義すると $X_n \nearrow X$ で，$B \in \mathcal{G}$ のとき

$$\int_B X_n(\omega)Y(\omega)P(d\omega) = \int_B X_n(\omega)E(Y \mid \mathcal{G})P(d\omega)$$

$n \to \infty$ のとき単調収束定理により

$$\int_B X(\omega)Y(\omega)P(d\omega) = \int_B X(\omega)E(Y \mid \mathcal{G})P(d\omega)$$

となり，$E(XY \mid \mathcal{G}) = XE(Y \mid \mathcal{G})$ が成り立つ．一般の場合は $X = X^+ - X^-$, $Y = Y^+ - Y^-$ と分解すると XY, Y が可積分なので $X^\pm Y^{pm}$ と $Y^\pm$ が可積分となり

$$
\begin{aligned}
E(XY \mid \mathcal{G}) = E(X^+Y^+ \mid \mathcal{G}) - E(X^-Y^+ \mid \mathcal{G}) - E(X^+Y^- \mid \mathcal{G}) + E(X^-Y^- \mid \mathcal{G}) \\
X^+E(Y^+ \mid \mathcal{G}) - X^-E(Y^+ \mid \mathcal{G}) - X^+E(Y^- \mid \mathcal{G}) + X^-E(Y^- \mid \mathcal{G}) \\
= X^+E(Y^+ - Y^- \mid \mathcal{G}) - X^-E(Y^+ - Y^- \mid \mathcal{G}) \\
= XE(Y \mid \mathcal{G}).
\end{aligned}
$$

(v) 練習問題でやったように

$$\varphi(X) \geq \varphi(E(X \mid \mathcal{G})) + \varphi_+(E(X \mid \mathcal{G}))(X - E(X \mid \mathcal{G}))$$

が成り立つ．ただし，$\varphi_+(x)$ は $\varphi(x)$ の右微分を表すものとする．ここで両辺の $\mathcal{G}$ に関する条件付き期待値をとると

$$E(\varphi(X) \mid \mathcal{G}) \geq E\left[\varphi(E(X \mid \mathcal{G})) + \varphi_+(E(X \mid \mathcal{G}))(X - E(X \mid \mathcal{G})) \mid \mathcal{G}\right]$$

線形性と (iv) により，右辺は

$$\varphi(E(X \mid \mathcal{G})) + \varphi_+(E(X \mid \mathcal{G}))(E\left[X - E(X \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{G}\right] = \varphi(E(X \mid \mathcal{G}))$$

となる．

(vi) 任意の $B \in \mathcal{G}$ に対して

$$\int_B E(X_n \mid \mathcal{G}) P(d\omega) = \int_B X_n(\omega) P(d\omega)$$

条件と正値性から $0 \leq E(X_n \mid \mathcal{G})$ は単調に増加し，その極限を Y とかくとこれは $\mathcal{G}$-可測であり，単調収束定理により

$$\lim_{n\to\infty} \int_B E(X_n \mid \mathcal{G}) P(d\omega) = \int_B Y(\omega) P(d\omega)$$

一方，右辺に単調収束定理を使うと

$$\lim_{n\to\infty} \int_B X_n(\omega) P(d\omega) = \int_B X(\omega) P(d\omega)$$

X が可積分なので，条件付き期待値の定義により $Y = E(X \mid \mathcal{G})$ が a.s. で成立する．

(vii) 正値性より

$$\inf_{k\geq n} E(X_k \mid \mathcal{G}) \geq E(Y_n \mid \mathcal{G}).$$

$Y_n = \inf_{k\geq n} X_k$ は単調増加で $\liminf_{n\to\infty} X_n$ に収束する．

(vi) よりこの式で $n \to \infty$ として

$$\liminf_{n\to\infty} E(X_n \mid \mathcal{G}) \geq E(\liminf_{n\to\infty} X_n \mid \mathcal{G})$$

(viii) 通常の Lebesgue の収束定理の証明と同じ．$Z - X_n$ に (vii) を使うと

$$E(Z \mid \mathcal{G}) - \limsup_{n\to\infty} E(X_n \mid \mathcal{G}) \geq E(Z - X \mid \mathcal{G})$$

つまり $\limsup_{n\to\infty} E(X_n \mid \mathcal{G}) \leq E(X \mid \mathcal{G})$ を得る．$Z + X_n$ に使うと，

$$\liminf_{n\to\infty} E(X_n \mid \mathcal{G}) \geq E(X \mid \mathcal{G})$$

となるので結論が出る．X_n, X の可積分性は Z の可積分性から出る． □