

2.5 空間 \mathcal{L}^2 の元の確率積分

定義 2.10 確率過程 $\Phi = \Phi(t, \omega)$ が (\mathcal{F}_t) -発展的可測であるとは, 任意の $t \geq 0$ に対して, $\Phi(s, \omega)$ を $(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega$ の関数と見たとき $\mathcal{B}([0, t]) \times \mathcal{F}_t$ -可測となることをいう.

注意 階段型過程は (\mathcal{F}_t) -発展的可測. また, 一般に (\mathcal{F}_t) -発展的可測ならば, (\mathcal{F}_t) -適合. 逆に, 連続な (\mathcal{F}_t) -適合過程は (\mathcal{F}_t) -発展的可測.

なぜなら, $\Phi(t, \omega) = 1_{\{0\}}(t)\xi_0 + \sum_{j=1}^n 1_{(t_{j-1}, t_j]}(t)\xi_j$ に対して,

$$\begin{aligned} & \{(s, \omega) \in [0, t] \times \Omega; \Phi(s, \omega) \leq a\} \\ &= \{0\} \times \{\omega \in \Omega; \xi_0(\omega) \leq a\} \cup \bigcup_{j=1}^n (t_{j-1} \wedge t, t_j \wedge t] \times \{\omega \in \Omega; \xi_j(\omega) \leq a\} \end{aligned}$$

となるので, 階段型過程の発展的可測性がわかる.

Φ が発展的可測ならば, Fubini の定理により, $\mathcal{B}[0, t] \times \mathcal{F}_t$ -可測な $\Phi(s, \omega)$ の $s = t$ での切り口として $\Phi(t, \omega)$ は \mathcal{F}_t -可測. したがって Φ は (\mathcal{F}_t) -適合.

Φ が連続な (\mathcal{F}_t) -適合過程なら, 階段型過程で各点近似できる. よって, Φ は上の事から (\mathcal{F}_t) -発展的可測.

定義 2.11 (空間 \mathcal{L}^2) (\mathcal{F}_t) -発展的可測な確率過程 Φ で, 任意の $T > 0$ に対して

$$E \left[\int_0^T |\Phi(t, \omega)|^2 ds \right] < \infty \quad (2.9)$$

となるものの全体を \mathcal{L}^2 と書く. $\Phi \in \mathcal{L}^2$ に対して,

$$\|\Phi\|_T := \left\{ E \left[\int_0^T |\Phi(t, \omega)|^2 ds \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.10)$$

とおき, $\Phi, \Psi \in \mathcal{L}^2$ に対して

$$\|\Phi - \Psi\| := \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} (\|\Phi - \Psi\|_N \wedge 1) \quad (2.11)$$

とおく. $\|\Phi - \Psi\| = 0$ のとき, 二つの確率過程は \mathcal{L}^2 の元としては同一視する.

注意 $\|\cdot\|$ により \mathcal{L}^2 は完備な距離空間となる．それは， \mathcal{L}_T^2 を $\|\cdot\|_T$ をノルムとするヒルベルト空間と思うと，その完備性から，ここでの極限 $X(t)$ が \mathcal{L}^2 のコーシー列に対して定まる．この極限は T について consistent .

補題 2.14 \mathcal{L}_0 は \mathcal{L}^2 の中で *dense* .

証明

(i) $\Phi \in \mathcal{L}^2$ が有界のときに \mathcal{L}_0 の元で近似できればいい .

(ii) $\Phi_h(t) := \frac{1}{h} \int_{(t-h) \vee 0}^t \Phi(s) ds$ を考えると，Lebesgue の微分定理により，任意の ω に対して，ほとんどすべての t について

$$\Phi_h(t, \omega) \rightarrow \Phi(t, \omega) \quad (h \rightarrow 0)$$

が成り立つ．有界性の仮定と有界収束定理により， $\|\Phi_h - \Phi\| \rightarrow 0$ となり，連続な Φ に対して \mathcal{L}_0 の元で近似できればいい．この近似は各点では出来ているから，再び有界収束定理を用いれば証明が完結する．

$\Phi \in \mathcal{L}^2$ に対して，補題 2.14 から， \mathcal{L}^2 で Φ を近似する階段型過程 $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty$ がある．このとき，任意の $T > 0$ に対して，

$$\|\Phi_n - \Phi\|_T \rightarrow 0$$

となるので，マルチンゲールの不等式を使うと，

$$E[\max_{0 \leq t \leq T} |I(\Phi_n)(t) - I(\Phi_m)(t)|^2] \leq 4E\left[\int_0^T |\Phi_n(t) - \Phi_m(t)|^2 ds\right]$$

となるが，右辺は $4\|\Phi_n - \Phi_m\|_T^2 \rightarrow 0$ となる．よって，確率 1 で $I(\Phi_n)(t)$ は広義一様収束し，極限は連続な確率過程となる．この極限は，近似列 $\{\Phi_n\}$ の取り方によらない．この極限を Φ の Brown 運動 $B(t)$ に関する確率積分とよび，

$$\int_0^t \Phi(s) dB(s)$$

と書く．

参考：マルチンゲールの不等式

$M(t)$ が $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ に関してマルチンゲールするとき, つまり, 任意の $t > s$ に対して

$$E[M(t) \mid \mathcal{F}_s] = M(s) \quad a.s.$$

となり, なおかつ, ある $p > 1$ に対して $E[|M(t)|^p] < \infty$ がすべての t について成り立っている時,

$$E \left[\max_{0 \leq t \leq T} |M(t)|^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p E[|M(T)|^p].$$

補題 2.15 任意の $t, s \geq 0$ に対して

$$\int_0^t 1_{[0,s]}(u) \Phi(u) dB(u) = \int_0^{s \wedge t} \Phi(u) dB(u)$$

証明 $\Phi \in \mathcal{L}_0$ のときは確率積分の定義から明らか．あとは極限をとればよい．

区間 $[a, b]$ に対する確率積分は，上の事から

$$\int_a^b \Phi(s) dB(s) = \int_0^b \Phi(s) 1_{[a,b]}(s) dB(s)$$

によって定義することができる．これで，普通の積分のように，確率積分の区間に対する加法性が成り立つ．

定理 2.16 $\Phi \in \mathcal{L}^2$ に対して，その確率積分

$$I(\Phi)(t) = \int_0^t \Phi(s, \omega) dB(s)$$

は，以下の性質を持つ．

- (i) (\mathcal{F}_t -適合性) 任意の $t \in [0, \infty)$ に対して $I(\Phi)(t)$ は \mathcal{F}_t -可測
- (ii) (連続性) $I(\Phi)(t)$ は t について連続 *a.s.*
- (iii) (線形性)

$$I(\alpha\Phi + \beta\Psi)(t) = \alpha I(\Phi)(t) + \beta I(\Psi)(t) \quad a.s.$$

- (iv) (マルチンゲール性)

$$E(I(\Phi)(t) | \mathcal{F}_s) = I(\Phi)(s) \quad a.s.$$

- (v) (等長性)

$$E((I(\Phi)(t))^2) = E \int_0^t \Phi(s)^2 ds$$

さらに一般に $t > v$ のとき，

$$E[(I(\Phi)(t))^2 - \int_0^t \Phi(s)^2 ds | \mathcal{F}_v] = I(\Phi)(v)^2 - \int_0^v \Phi(s)^2 ds$$

証明は \mathcal{L}_0 で成立している式の極限を取ればよい．