## 2.6 伊藤の公式（ Ito formula ）

$B(t)$ を $(\mathcal{F}_t)$-Brown 運動とし，次の様な確率過程を考える．

$$X(t) = X(0) + \int_0^t b(s,\omega)ds + \int_0^t a(s,\omega)dB(s) \tag{2.12}$$

ここに， $a(t,\omega)$, $b(t,\omega)$ はともに $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測な確率過程で，任意の $T > 0$ に対して

$$\int_0^T |b(s,\omega)|ds \quad < \quad \infty \quad a.s. \tag{2.13}$$

$$\int_0^T |a(s,\omega)|^2 ds \quad < \quad \infty \quad a.s. \tag{2.14}$$

をみたすものとする．このような確率過程は**伊藤過程**ともよばれ，連続な確率過程の重要な例として知られている．

**定理 2.17** $M(t)$ が連続な $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールで，$K(t)$ が $(\mathcal{F}_t)$-発展的可測で，

$$M(t) = \int_0^t K(s)\,ds \quad \text{ただし} \quad \int_0^T |K(s)|\,ds < \infty \;\; a.s.,$$

ならば

$$M(t) = 0 \quad \forall t \le T, \quad a.s.$$

となる．

この定理は伊藤過程の分解 (2.12) が一意的であることを意味している．

**証明** $\int_0^T |K(s)|ds \le N$ となる定数 $N$ がとれるときをまず考える．このとき，$t > s$ として，

$$\begin{aligned} E\left[(M(t) - M(s))^2\right] &= E\left[M(t)^2 - 2M(t)M(s) + M(s)^2\right] \\ E\left[M(t)M(s)\right] &= E\left[M(s)E\big[M(t) \mid \mathcal{F}_s\big]\right] = E\left[M(s)^2\right] \end{aligned}$$

なので

$$E\left[(M(t) - M(s))^2\right] = E\left[M(t)^2 - M(s)^2\right]$$

となる．いま，$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ を区間 $[0, t]$ の分割とするとき，$M(0) = 0$ とあわせて，

$$
\begin{aligned}
E\left[M(t)^2\right] &= E\left[M(t)^2 - M(0)^2\right] = \sum_{i=0}^{n-1} E\left[M(t_{i+1})^2 - M(t_i)^2\right] \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} E\left[(M(t_{i+1}) - M(t_i))^2\right] \\
&\leq E\left[\sup_{0\leq i\leq n-1} |M(t_{i+1}) - M(t_i)| \sum_{i=0}^{n-1} |M(t_{i+1}) - M(t_i)|\right] \\
&\leq E\left[\sup_{0\leq i\leq n-1} |M(t_{i+1}) - M(t_i)| \int_0^T |K(s)|ds\right]
\end{aligned}
$$

右辺の被積分項は $2N^2$ 以下で，$\sup_{0\leq i\leq n-1} |M(t_{i+1}) - M(t_i)|$ は，$M(t)$ が $[0, t]$ 上一様連続となることから，分割の幅

$$\max_{0\leq i\leq n-1} |t_{i+1} - t_i|$$

を 0 に近づけると $a.s. \omega$ に対して 0 に収束するので有界収束定理（または Lebesgue の優収束定理）により，

$$E\left[\sup_{0\leq i\leq n-1} |M(t_{i+1}) - M(t_i)| \int_0^T |K(s)|ds\right] \to 0$$

となる．したがって $M(t) = 0,\ a.s.$ がわかる．

一般の場合は停止時刻を使った議論を行う．$N \geq 1$ に対して

$$\tau_N := \begin{cases} \min\{t \geq 0;\ \int_0^t |K(s)|ds \geq N\} & \\ \infty, & \text{上の集合が空集合のとき} \end{cases}$$

とおく．$\tau_N \to \infty$ $(N \to \infty$ である．Doob の任意抽出定理により $\tilde{M}^N(t) = M(t \wedge \tau_N)$ は $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲールであり

$$\tilde{M}^N(t) = \int_0^{t\wedge\tau_N} K(s)ds = \int_0^t 1_{[0,\tau_N]}(s)K(s)ds$$

とかけて，

$$|\tilde{M}^N(t)| \leq \int_0^{\tau_N} |K(s)|ds \leq N$$

だから，上の結果が使えて $\tilde{M}^N(t) = 0$ $a.s.$ がすべての $t$ について成立．$N \to \infty$ とする事により $M(t) = 0$ $a.s.$ がすべての $t$ で成立．最後に , $M(t)$ の連続性から $M(t) = 0$ $\forall t \in [0, t]$ $a.s.$ が従う．

**定理 2.18** ( **伊藤の公式**) $f$ が $C^2$ 級の関数の時，(2.12) の確率過程 $X(t)$ に対して，次の式が $a.s.$ で成立する．

$$\begin{aligned} f(X(t)) = f(X(0)) \quad &+ \quad \int_0^t \left\{ b(s,\omega) f'(X(s)) + \frac{1}{2} a(s,\omega)^2 f''(X(s)) \right\} ds \\ &+ \quad \int a(s,\omega) f'(X(s)) dB(s) \end{aligned} \tag{2.15}$$

**証明** $f \in C_b^2$ で $a, b$ が有界な場合を考える．$f, f', f''$ はこのときすべて有界かつ一様連続となっていることに注意する．任意に $t > 0$ を固定する．$\{t_k^{(n)}; 0 \leq k \leq 2^n\}$ は $[0, t]$ の $2^n$ 等分点と $a$ の $[0, t]$ の分点をあわせたものを小さい順に並べたものとする．$(t_0^{(n)} = 0,\ t_{\beta(n)}^{(n)} = t)$.

$$f(X(t)) - f(X(0)) = \sum_{k=1}^{\beta(n)} \left[ f(X(t_j^{(n)})) - f(X(t_{j-1}^{(n)})) \right]$$

として，各 $j$ において 2 次まで Taylor 展開.

$$\begin{aligned} f(X(t_j^{(n)})) - f(X(t_{j-1}^{(n)})) \quad &= \quad f'(X(t_{j-1}^{(n)}))[X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)})] \\ &\qquad + \frac{1}{2} f''(\theta_j^{(n)})[X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)})]^2. \end{aligned}$$

右辺第 1 項の和を $I$, 第 2 項の和を $II$ とかく．

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f'(X(t_{j-1}^{(n)})) \big[ X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)}) \big] \\ &= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f'(X(t_{j-1}^{(n)})) \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} b(s,\omega) ds + \sum_{j=1}^{\beta(n)} f'(X(t_{j-1}^{(n)})) \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s,\omega) dB(s) \\ &= \int_0^t f'(X(s)) b(s,\omega) ds + \int_0^t f'(X(s)) a(s,\omega) dB(s) \\ &+ \sum_{j=1}^{\beta(n)} \int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} \big[ f'(X(t_{j-1}^{(n)})) - f'(X(s)) \big] b(s,\omega) ds \end{aligned}$$