定理 2.18 (**伊藤の公式**) f が C^2 級の関数の時，(2.12) の確率過程 $X(t)$ に対して，次の式が $a.s.$ で成立する．

$$f(X(t)) = f(X(0)) \quad + \quad \int_0^t \left\{ b(s,\omega)f'(X(s)) + \frac{1}{2}a(s,\omega)^2 f''(X(s)) \right\} ds$$
$$+ \quad \int a(s,\omega)f'(X(s))dB(s) \tag{2.15}$$

証明

$$\tau_N = \inf\{t \geq 0\,;\left|\int_0^t a(s)dB(s)\right| > N,\ \text{or}\ \int_0^t |b(s)|ds > N,\ \text{or}\ \int_0^t a^(s)^2 ds > N\}$$

と置く．

$$X_N(t) = \begin{cases} 0, & |X(0)| > N \text{ のとき} \\ X(t\wedge\tau_N), & |X(0)| \leq N \text{ のとき} \end{cases}$$

とすると，$|X_N(t)| \leq 3N$ なので，$f(X_N(t))$ を考えると，この時は f, f', f'' の変数は $\{|x| \leq 3N\}$ を考えれば良いので，f は C_b^2 の元と思ってよい．$X_N(t)$ も伊藤過程であることは

$$\int_0^{t\wedge\tau_N} a(s)dB(s) = \int_0^t 1_{[0,\tau_N]}(s)a(s)dB(s)$$

とかけるからわかる．(ds 積分についても同じ理由)

任意の $N \geq 1$ で $X = X_N$ に対して (2.15) が成り立っているとすると，確率積分と積分の連続性から $N \to \infty$ のとき $\tau_N \to \infty$ であることがわかり，これは X 自身について (2.15) が成り立つことを言っている．

したがって，以下では有界性

$$\max\left\{\left|\int_0^t a(s)dB(s)\right|, \int_0^t |b(s)|ds, \int_0^t a^2(s)ds\right\} \leq N \tag{2.16}$$

を仮定してよいことを注意しておく．

任意に $t > 0$ を固定する．$\Delta = \{t_k^{(n)}; 0 \leq k \leq \beta(n)\}$ は $[0,t]$ の分割で，$n \to \infty$ のとき $|\Delta| \to 0$ となるものとする．

$$f(X(t)) - f(X(0)) = \sum_{k=1}^{\beta(n)} \left[f(X(t_j^{(n)})) - f(X(t_{j-1}^{(n)})) \right]$$

として，各 j において 2 次まで Taylor 展開.

$$f(X(t_j^{(n)})) - f(X(t_{j-1}^{(n)})) = f'(X(t_{j-1}^{(n)}))[X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)})] +$$

$$+\frac{1}{2}f''(\theta_j^{(n)})[X(t_j^{(n)})-X(t_{j-1}^{(n)})]^2.$$

右辺第 1 項の和を I, 第 2 項の和を II とかく.

$$\begin{aligned}
I &= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f'(X(t_{j-1}^{(n)}))\big[X(t_j^{(n)})-X(t_{j-1}^{(n)})\big] \\
&= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f'(X(t_{j-1}^{(n)}))\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} b(s,\omega)ds+\sum_{j=1}^{\beta(n)} f'(X(t_{j-1}^{(n)}))\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s,\omega)dB(s) \\
&= \int_0^t f'(X(s))b(s,\omega)ds+\int_0^t f'(X(s))a(s,\omega)dB(s) \\
&+ \sum_{j=1}^{\beta(n)}\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}}\big[f'(X(t_{j-1}^{(n)}))-f'(X(s))\big]b(s,\omega)ds \\
&+ \sum_{j=1}^{\beta(n)}\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}}\big[f'(X(t_{j-1}^{(n)}))-f'(X(s))\big]a(s,\omega)dB(s) \\
&=: I_1+I_2+I_3+I_4.
\end{aligned}$$

I_1 と I_2 は (2.15) の右辺に現れている.

$n\to\infty$ のとき $I_3\to 0$ (t について広義一様)a.s. が成り立つ．なぜなら，$f'(X(t))$ は t について一様連続なので,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\beta(n)}\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}}\big[f'(X(t_{j-1}^{(n)}))-f'(X(s))\big]b(s,\omega)ds \\
\leq\quad &\Big(\sup_{\substack{|u-v|\leq 2^{-n},\\ u,v\in[0,T]}}|f'(X(u))-f'(X(v))|\Big)\int_0^t|b(s,\omega)|ds.
\end{aligned}$$

右辺は t について広義一様に 0 に収束する.

$I_4\to 0\quad in\ L^2(P)$ である．なぜなら，定理 2.16 により,

$$E(I_4^2)=\sum_{j=1}^{\beta(n)} E\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}}\big[f'(X(t_{j-1}^{(n)}))-f'(X(s))\big]^2 a(s,\omega)^2ds.$$

f' が有界かつ連続なことと，X の連続性から有界収束定理により右辺は 0 に収束．以上より，I は $n \to \infty$ のとき

$$\int_0^t a(s,\omega)f'(X(s))dB(s) + \int_0^t b(s,\omega)f'(X(s))ds$$

に収束．(この収束は少なくとも確率収束)

II の計算に移ろう．

$$\begin{aligned}
2II &= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(\theta_j^{(n)})\Big[X(t_j^{(n)}) - X(t_{j-1}^{(n)})\Big]^2 \\
&= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(\theta_j^{(n)})\left(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s,\omega)dB(s)\right)^2 \\
&+ 2\sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(\theta_j^{(n)})\left(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s,\omega)dB(s)\right)\left(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} b(s,\omega)ds\right) \\
&+ \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(\theta_j^{(n)})\left(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} b(s,\omega)ds\right)^2 \\
&:= II_1 + II_2 + II_3
\end{aligned}$$

f'' の一様連続性と，(2.16)　および確率積分の連続性により，$n \to \infty$ のとき，$II_2, II_3 \to 0$ $a.s.$ は簡単にわかる．II_1 の収束を計算するために補題を一つ用意する．

補題 2.19 $(\mathcal{F}_t)$-マルチンゲール $M(t)$ が $|M(t)| \leq N$ を任意の $t > 0$ に対して満たしているとする．このとき、任意の $t > 0$ と $[0,t]$ の任意の分割 Δ:

$$\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < \beta(n) = t\}$$

に対して

$$E\left[\{\sum_{j=1}^{\beta(n)} \left(M(t_j) - M(t_{j-1})\right)^2\}^2\right] \leq \quad 12C^4$$

が成り立つ。

証明

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{j=1}^{\beta(n)} E\left[\left(M(t_j)-M(t_{j-1})\right)^4\right] \\
&\quad + 2\sum_{j=1}^{\beta(n)-1}\sum_{k=j+1}^{\beta(n)} E\left[\left(M(t_j)-M(t_{j-1})\right)^2\left(M(t_k)-M(t_{k-1})\right)^2\right]
\end{aligned}
$$

$=: A+B$

と書く．有界性の仮定により，

$$
|A| \le 4C^2 E\left[\sum_{j=1}^{\beta(n)}\left(M(t_j)-M(t_{j-1})\right)^2\right]
$$

だが，各 j においてマルチンゲール性から

$$
E\left\{\left((M(t_j)-M(t_{j-1})\right)^2\right\} = E(M(t_j)^2 - M(t_{j-1})^2)
$$

となるので，

$$
|A| \le 4C^2 E(M(t)^2 - M(0)^2) \le 4C^4.
$$

同様に，$k \ge j+1$ のとき

$$
E\left[\left(M(t_k)-M(t_{k-1})\right)^2 \middle| \mathcal{F}_{t_j}\right] = E\left[M(t_k)^2 - M(t_{k-1})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_j}\right]
$$

だから，

$$
\begin{aligned}
|B| &\le 2\sum_{j=1}^{\beta(n)-1}\sum_{k=j+1}^{\beta(n)} E\left\{E\left[M(t_k)^2 - M(t_{k-1})^2 \middle| \mathcal{F}_{t_j}\right]\left(M(t_j)-M(t_{j-1})\right)^2\right\} \\
&= 2\sum_{j=1}^{\beta(n)-1} E\left\{\left(M(t)^2 - M(t_j)^2\right)\left(M(t_j)-M(t_{j-1})\right)^2\right\} \\
&\le 4C^2 \sum_{j=1}^{\beta(n)-1} E\left\{\left(M(t_j)-M(t_{j-1})\right)^2\right\} \\
&= 4C^2 E(M(t)^2 - M(0)^2) \le 8C^4.
\end{aligned}
$$

□

さて、定理の証明に戻ろう。

$$
\begin{aligned}
II_1 &= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(X(t_{j-1}^{(n)}))\left[\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j-1}^{(n)}} a(s,\omega)dB(s)\right]^2 \\
&\quad + \sum_{j=1}^{\beta(n)} [f''(\theta_j^{(n)}) - f''(X(t_{j-1}^{(n)}))]\left[\int_{t_j^{(n)}}^{t_{j-1}^{(n)}} a(s,\omega)dB(s)\right]^2 \\
&:= II_{1,a} + II_{1,b}
\end{aligned}
$$

$E|II_{1,b}| \to 0$ である．なぜなら,

$$
\begin{aligned}
E|II_{1,b}| &\leq \left(E\big[\sup_{\substack{u,v\in[0,t]\\|u-v|\leq 2^{-n}}} |f''(X(u)) - f''(x(v))|\big]^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times\left(E\big[\sum_{j=1}^{\beta(n)}(\int_{t_{j-1}^{(n)}}^{t_j^{(n)}} a(s)dB(s))^2\big]^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

補題 2.19 および $f''(X(s))$ の有界性と一様連続性により $E|II_{1,b}|$ は 0 に収束する．$II_{1,a}$ の代わりに

$$
III = \sum_j f''(X(t_{j-1}^{(n)}))\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s)^2 ds
$$

を考えると、これは $f''(X(s))$ の連続性から $n \to \infty$ のとき

$$
\int_0^t f''(X(s))a(s)^2 ds
$$

に収束する。あとは $E\left[|II_{1,a} - III|^2\right] \to 0$ を示せば良い．定理 2.16 の等長性により

$$
\left(\int_0^t a(s)dB(s)\right)^2 - \int_0^t a(s)^2 ds
$$

が $\mathcal{F}_t$-マルチンゲールであるので、

$$
\begin{aligned}
&E\left[|II_{1,a} - III|^2\right] \\
&= \sum_{j=1}^{\beta(n)} f''(X(t_{j-1}))^2\left(\Big(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s)dB(s)\Big)^2 - \int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s)^2 ds\right)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\sum_{j=1}^{\beta(n)} E\left[f''(X(t_{j-1}))^2 \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s)dB(s) \right)^4 \right] \\
&+ 2\sum_{j=1}^{\beta(n)} E\left[f''(X(t_{j-1}))^2 \left(\int_{t_{j-1}}^{t_j} a(s)^2 ds \right)^2 \right] \\
&=: IV_a + IV_b
\end{aligned}
$$

IV_a, IV_b は II_2, II_3 と同じように 0 に収束する． □