

大学院コア科目「確率論」レポート問題 No.4  
提出は次回の講義 (5/17) の時間まで .

学籍番号

氏名

---

$\{N(n)\}$  が有界な  $(\mathcal{F}_n)$ -マルチンゲールであるとき ,

$$X(n) = e^{N(n)}$$

が  $(\mathcal{F}_n)$ -劣マルチンゲールであることを次の順序で確かめよ .

(1)  $\varphi(x)$  が  $\mathbb{R}$  上の微分可能な凸関数のとき , 任意の実数  $y, z$  に対して

$$\varphi(y) \geq \varphi(z) + \varphi'(z)(y - z)$$

が成り立つことを証明せよ .

(2) 上の式で  $y = N(n), z = N(n-1)$  を代入した式を ,  $\mathcal{F}_{n-1}$  での条件付き期待値をとり ,

$$E[\varphi(N(n)) \mid \mathcal{F}_{n-1}] \geq \varphi(N(n-1))$$

を示せ .

(3)  $X(n) = e^{N(n)}$  が  $(\mathcal{F}_n)$ -劣マルチンゲールであることを確かめよ .