2012 年 4 月 10 日分

数学通論 レポート 1　　解答と解説

目標: 複素数と複素平面の初等幾何的な理解

key words 複素平面 (complex plane), 実軸 (real axis), 虚軸 (imaginary axis), 共役複素数 (complex conjugate), 絶対値 (absolute value), 偏角 (argument), 和 (sum), 差 (difference), 積 (product), 商 (quotient)

問 1.1 プリントの問に答えよ。

(1)　問 1

(2)　問 3

(3)　問 6

(4)　問 8

(5)　問 9

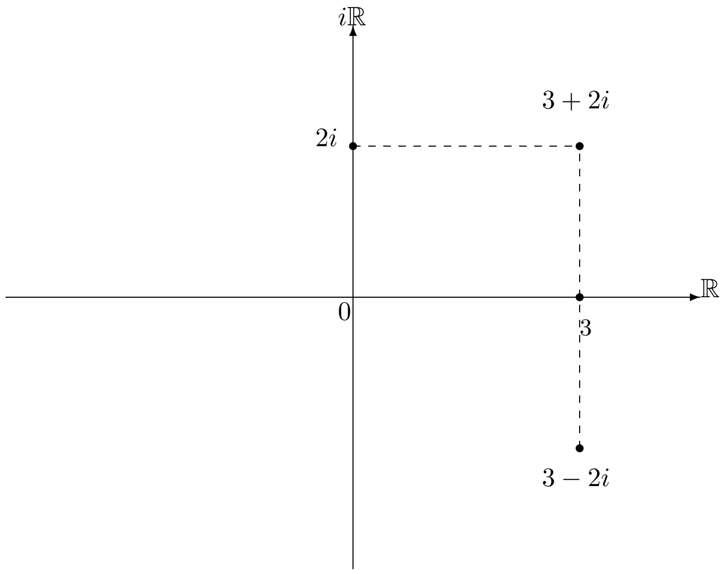
(6)　問 12

(7)　問 13

(8)　問 16

解答

(1) 問 1



(2) 問 3 $\overline{1+2i} = 1-2i, \overline{3+4i} = 3-4i$ だから、

$$\overline{1+2i+3+4i} = \overline{4+6i} = 4-6i = (1-2i)+(3-4i) = \overline{1+2i}+\overline{3+4i}$$
$$\overline{1+2i-(3+4i)} = \overline{-2-2i} = -2+2i = (1-2i)-(3-4i) = \overline{1+2i}-\overline{3+4i}$$
$$\overline{(1+2i)(3+4i)} = \overline{-5+10i} = -5-10i = (1-2i)(3-4i) = \overline{1+2i}\cdot\overline{3+4i}$$
$$\overline{\left(\frac{1+2i}{3+4i}\right)} = \overline{\frac{11+2i}{25}} = \frac{11-2i}{25} = \frac{1-2i}{3-4i} = \frac{\overline{1+2i}}{\overline{3+4i}}$$

(3) 問 6

$|4-2i|=\sqrt{20}=2\sqrt{5},\quad |-3i|=3,\quad |(1+i)(2+i)|=\sqrt{2}\sqrt{5}=\sqrt{10},\quad \left|\frac{1+2i}{3+i}\right|=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

(4) 問 8 弧度法で書いておく。

$(1) 1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

$(2)-1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$

$(3) 3-\sqrt{3}i=2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{3}(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$

$(4)-i=1(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$

$(5) 3=3(\cos 0+i\sin 0)$

$(6)\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}$ [絶対値が 1 の時は極形式では絶対値を省略してよい]

(5) 問 9

$$z_1z_2=6(\cos 50^\circ+i\sin 50^\circ)$$

絶対値は 6, 偏角は 50°

(6) 問 12

$$z_1=-1+\sqrt{3}i=2\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3})$$
$$z_2=1+i=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

なので、$|z_1|=2, |z_2|=\sqrt{2},\ \arg z_1=\frac{2\pi}{3},\ \arg z_2=\frac{\pi}{4}$ したがって
$|z_1/z_2|=|z_1|/|z_2|=\sqrt{2},\ \arg\frac{z_1}{z_2}=\arg z_1-\arg z_2=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$ だから、z_1/z_2 を極形式で表すと、

$$\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12})$$

(7) 問 13

(1) $|1+i|=\sqrt{2},\quad \arg(1+i)=\frac{\pi}{4}$ だから、$|(1+i)^8|=2^4=16,\quad \arg(1+i)^8=8\times\frac{\pi}{4}=2\pi$ となり、

$$(1+i)^8=16(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=16$$

(2) $|-1+\sqrt{3}i|=2,\quad \arg(-1+\sqrt{3}i)=\frac{2\pi}{3}$ だから、
$|-1+\sqrt{3}i|^6=2^6=64,\quad \arg(-1+\sqrt{3}i)^6=6\times\frac{2\pi}{3}=4\pi$ となり、

$$(-1+\sqrt{3}i)^6=64(\cos 4\pi+i\sin 4\pi)=64$$

(3) $|\sqrt{3}-i|=2,\quad \arg(\sqrt{3}-i)=-\frac{\pi}{6}$ だから、
$|(\sqrt{3}-i)^{-8}|=2^{-8}=\frac{1}{256},\quad \arg(\sqrt{3}-i)^{-8}=-8\times\frac{-\pi}{6}=\frac{4\pi}{3}$ となり、

$$(\sqrt{3}-i)^{-8}=\frac{1}{256}(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})=-\frac{1}{512}-i\frac{\sqrt{3}}{512}$$

(8) 問 16

(1) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と書く。 $(0 \le \theta < 2\pi)$ このとき、

$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$$

両辺の絶対値を比較して、$r^2 = 1$ で、 $r \ge 0$ より、$r = 1$. また、上式の両辺の偏角を比較して、

$$2\theta = \frac{\pi}{2}(\mod 2\pi),\quad \theta = \frac{\pi}{4}(\mod \pi)$$

したがって $0 \le \theta < 2\pi$ より、 $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ $z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, -\frac{1+i}{\sqrt{2}}$

(2) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と書く。 $(0 \le \theta < 2\pi)$ このとき、
$z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta) = -16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi)$ だから、両辺の絶対値を比較して $r^4 = 16$ で、$r \ge 0$ より $r = 2$. また、上式の両辺の偏角を比較して、

$$4\theta = \pi\ (\mod 2\pi),\quad \theta = \frac{\pi}{4}\ (\mod \frac{\pi}{2})$$

したがって $0 \le \theta < 2\pi$ より、$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ となり、
$z = \sqrt{2}(1+i), \sqrt{2}(-1+i), \sqrt{2}(-1-i), \sqrt{2}(1-i)$

(3) $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ と書く。 $(0 \le \theta < 2\pi)$ このとき、
$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta) = 1 + \sqrt{3}i = 2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ だから、両辺の絶対値を比較して $r^2 = 2$ で、$r \ge 0$ より、$r = \sqrt{2}$. また、上式の両辺の偏角を比較して、

$$2\theta = \frac{\pi}{3}\ (\mod 2\pi),\quad \theta = \frac{\pi}{6}\ (\mod \pi)$$

したがって $0 \le \theta < 2\pi$ より、$\theta = \frac{\pi}{6},\ \frac{7\pi}{6}$. となり、$z = \frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}},\ -\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{2}}$