2012 年 4 月 17 日分

数学通論 レポート 2 解答

目標: 次の定義 (definition) を明確に理解する．写像 (map), f^{-1}(逆像／逆写像 — inverse image / inverse map），$f \circ g$ (合成写像 — composition map), 定義域 (domain of definition), 値域 (range), 単射 (injection), 全射 (surjection).

関数という概念は数学の歴史において, 厳密に, かつ, より広い範囲のものに変化していった. 関数とは何か, と聞かれたとき, “$y = x^2 - 1$ とか $y = \sin(3x+1)$ のようなもの” という答えが頭に浮かんだとしたら, これは 19(18) 世紀以前の関数の概念である．20 世紀に入り関数という概念は集合の概念を用いて, 講義で説明するように写像として一般化, 再定義された. 現代数学では写像を関数とも呼ぶ.

定義から分かるように, 写像 (関数) とは, “対応表のようなもの” または “何かを入力したらそれを加工して別のものを出力する装置のようなもの” と理解すべきである.

問 2.1 $A = \{1, 2, 3\}, B = \{4, 5, 6\}$ に対して、写像（関数）$f : A \longrightarrow B$ を $f(1) = 5, f(2) = 6, f(3) = 4$ で定義する.

(1)　$f^{-1}(4), f^{-1}(5), f^{-1}(6)$ を求めよ.

(2)　定義にしたがって f は全単射であることを説明せよ.

(3)　$f \circ f$ は定義できない. 理由を述べよ.

(4)　上で $A' = \{1, 2, 3, 4\}$ と変えた時、$f(4) = 4$ を付け加えて定義した新しい写像 $f : A' \longrightarrow B$ は単射でないが, 全射であることを確かめ, $f^{-1}(4)$ を求めよ.

解答

(1)　$f^{-1}(4) = 3,\ f^{-1}(5) = 1,\ f^{-1}(6) = 2.$

(2)　任意の元 (要素) $y \in B$ に対して上の問題で調べたように $f(x) = y$ となる元 $x \in A$ が存在するので, f は全射. $f(1) \neq f(2),\ f(1) \neq f(3),\ f(2) \neq f(3)$ なので, 単射.

(3)　$f : A \to B$ を写像とするとき, f と f の合成写像が定義できるためには, 合成写像の定義から $A \supset B$ でないといけない. しかし, この例では $A \supset B$ ではない.

(4)　新しい写像 $f : A' \to B$ は

$$f(1) = 5, f(2) = 6, f(3) = 4, f(4) = 4$$

となっており, $f(A') = \{4, 5, 6\} = B$ だから全射である. しかし, $f(3) = f(4) = 4$ と 4 という B の元に対応している A' の要素は $3, 4$ と二つあるので, この f は 単射ではない.

問 2.2 $A = \{1, 2, 3, 4\}$ に対して、写像 $f : A \longrightarrow A$ を、$f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 1, f(4) = 3$ で定義する. つまり $f(x)$ は $2x$ を 5 で割った余り.

(1)　f の逆写像 $f^{-1}(1), \ldots, f^{-1}(4)$ を求めよ. $f^{-1}(x)$ は x に $\boxed{}$ をかけて 5 で割った余りである. $\boxed{}$ を求めよ.

(2)　$(f \circ f)(1), \cdots, (f \circ f)(4)$ を求めよ. $(f \circ f)(x)$ は x に $\boxed{}$ をかけて 5 で割った余りである. $\boxed{}$ を求めよ.

(3)　$(f \circ f \circ f \circ f)(1), \cdots, (f \circ f \circ f \circ f)(4)$ を求めよ.

解答
(1) $f^{-1}(1)=3, f^{-1}(2)=1, f^{-1}(3)=4, f^{-1}(4)=2$. ここから, $f^{-1}(x)$ は x に 3 をかけて 5 で割った余りであることがわかる.
(2) $(f\circ f)(1)=f(f(1))=f(2)=4$, $(f\circ f)(2)=f(f(2))=f(4)=3$, $(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(1)=2$, $(f\circ f)(4)=f(f(4))=f(3)=1$. これから $(f\circ f)(x)$ は x に 4 をかけて 5 で割った余りであることがわかる.
(3) $(f\circ f\circ f\circ f)(1)=f(f(f(f(1))))=f(f(f(2)))=f(f(4))=f(3)=1$. 他も同様に計算すると, $(f\circ f\circ f\circ f)(x)=x$, $(x=1,2,3,4)$ となっている.

なおこの結果は偶然ではなく, mod 計算を習うと, どうしてこのような答となるかがわかる.
A と B を集合とするとき, A の要素（元）と, B の要素（元）の組

$$(a,b), \quad a\in A,\ b\in B$$

の集合を A と B の **直積集合** といい, $A\times B$ と書く.
つまり

$$A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A,\ b\in B\}$$

例. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{5,6\}$ のとき

$$\begin{aligned} A\times B &= \{(1,5),\ (1,6),\ (2,5),\\ &\qquad (2,6),\ (3,5),\ (3,6)\}\end{aligned}$$

問 2.3 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbf{R}\}$ とする. ここで $\mathbf{R}$ は実数の集合. 写像

$$f\,:\,\mathbf{R}^2\ni(x,y)\mapsto(x+y,xy)\in\mathbf{R}^2$$

を考える. (1) $f^{-1}(0,0)$, $f^{-1}(3,2)$, $f^{-1}(1,1)$ をそれぞれ求めよ. (2) f は全射か? f は単射か? (3) 値域 $f(\mathbf{R}^2)$ を求めて図示せよ.

解答
(1) $x+y=0, xy=0$ を解いて $(x,y)=(0,0)$. よって, $f^{-1}(0,0)=\{(0,0)\}$ である.
$x+y=3, xy=2$ を解いて $(x,y)=(1,2),(2,1)$. よって, $f^{-1}(3,2)=\{(1,2),(2,1)\}$ である.
$x+y=1, xy=1$ は実数解をもたない. よって, $f^{-1}(3,2)=\phi$ (空集合) である.
注意 この問題では $f^{-1}(a,b)$ という記号を逆写像の意味ではなく, 集合 $\{(x,y)\,|\,f(x,y)=(a,b)\}$ を表すために使っている. このように同じ記号でも, <u>文脈により解釈の違い</u> がある場合があるので, 注意.
(2) $f^{-1}(3,2)=\phi$ となる場合があるので, 全射でない. $f^{-1}(3,2)=\{(1,2),(2,1)\}$ (2 個以上) となる場合があるので, 単射でもない.
(3) プリント 257p. 例 3 を見よ.

問 2.4 （テント写像）$D=\{x\,|\,0\le x\le 1\}=[0,1]$ に対して、写像 f を
$$f(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$
で定義する.

(1) $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)=\left\{x\in D\,\middle|\, f(x)=\dfrac{1}{2}\right\}$ を求めよ.
(2) $(f\circ f)(x)$ を求めよ. $y=(f\circ f)(x)$ のグラフを書け.
(3) $(f\circ f\circ f)(x)$ を求めよ. $y=(f\circ f\circ f)(x)$ のグラフを書け.

解答 (1) $f^{-1}(1/2) = \{1/4, 3/4\}$.
(2) (a) $0 \le x \le 1/2$ の時. $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2x)$. ここでさらに場合わけをする. $0 \le x \le 1/4$ なら $0 \le 2x \le 1/2$, $1/4 \le x \le 1/2$ なら $1/2 \le 2x \le 1$ なので, $0 \le x \le 1/4$ の時, $f(2x) = 2(2x) = 4x$.
$1/4 \le x \le 1/2$ の時, $f(2x) = 2 - 2(2x) = 2 - 4x$.
(b) $1/2 \le x \le 1$ の時. $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(2 - 2x)$. (a) の考察と同様に, $1/2 \le x \le 3/4$ の時, $f(2 - 2x) = 2 - 2(2 - 2x)$, $3/4 \le x \le 1$ の時, $f(2 - 2x) = 2(2 - 2x)$.
(3) 次のページ.
補足 この関数は高木関数という, 連続だが微分できる点はどこにもない不思議な関数を構成する時に使う. google で, 高木関数 を検索してみよう.

問1.4(3)

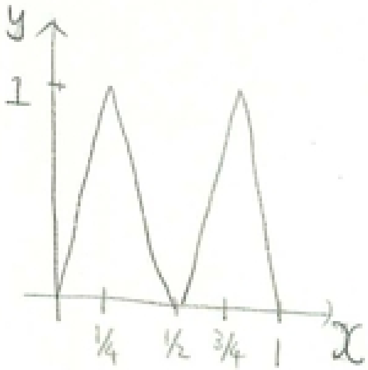
$f \circ f$をgとおく。

$(f \circ f \circ f)(x)$

$= f\left((f \circ f)(x)\right)$

$= f(g(x))$

(2)



$0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ のとき、$g(x) = 4x$.

$f(g(x)) = f(4x)$

$0 \leq x \leq \frac{1}{8}$ のとき $0 \leq 4x \leq \frac{1}{2}$

$\frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4}$ のとき $\frac{1}{2} \leq 4x \leq 1$

なので

$$f(4x) = \begin{cases} 2(4x) = 8x, & 0 \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{8} \\ 2-2(4x) = 2-8x, & \frac{1}{8} \leq x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

以下同様に計算していくと、グラフは次のようになる。