2013 年 4 月 24 日分

数学通論 レポート 3 解答

問 3.1 複素数の全体を $\mathbf{C}$ と書く. 複素数の全体 $\mathbf{C}$ から 非負の実数の全体 $\mathbf{R}_+$ への写像

$$f : \mathbf{C} \ni z \mapsto |z| \in \mathbf{R}_+$$

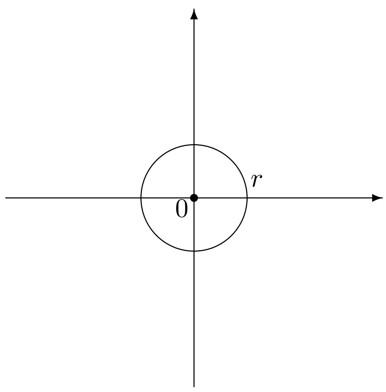
に対して $r > 0$ の逆像 $f^{-1}(r)$ を複素平面上に図示せよ. この写像は 単射であるか？ また, 全射であるか？

解答

$z = x + iy$ とかくと, $|z| = r$ は $\sqrt{x^2 + y^2} = r$ ということなので, $x^2 + y^2 = r^2$ つまり, z は複素平面上 原点中心で半径 r の円周上にある. 逆も正しく, この円周上の点 $w = u + iv$ を任意にとると $|w| = r$ となることも明らか. つまり,

$$f^{-1}(r) = \{x + iy \in \mathbf{C}\,;\, x^2 + y^2 = r^2\}$$

となる.



任意の $a > 0$ に対して $f(z) = a$ となる $z \in \mathbf{C}$ は複素平面内で原点中心，半径 a の円周上にある.（$a = 0$ のときは $z = 0$ のみが $f(z) = 0$ を満たす：$\mathbf{R}_+$ の定義に注意！）したがって f は全射である．しかし，図より単射でないことは明らか.（ $f(1) = f(i) = 1$ とちゃんと証明をしてくれた人もたくさんいました.
Sehr gut! – 僕はドイツ語が第 2 外国語なので．フランス語，ロシア語、中国語スペイン語では何というのかな? 知ってたら教えて!)

問 3.2 複素数を成分に持つ 2×2 行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ を考える．ただし $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ とする.

(1) $a_{11} = 1, a_{12} = \sqrt{-3}, a_{21} = 1, a_{22} = -3$ のとき A^{-1} を計算せよ.

(2) 写像

$$f_A : \mathbf{C}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$$

は $\mathbf{C}^2$ から $\mathbf{C}^2$ への全単射である事を示せ.

(3) B も複素数を要素に持つ 2×2 行列で $|B| \neq 0$ とするとき, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ となることを, 直接の計算 (逆行列 $(AB)^{-1}, A^{-1}, B^{-1}$ を直接計算して確かめるか, または行列の積に関する結合法則を証明し, $B^{-1}A^{-1}AB = ABB^{-1}A^{-1}$ が単位行列である事を確かめる）で証明せよ.

(4) ”写像 $f : X \to Y$ と $g : X' \to Y'$ が等しい” の定義を書け.

(5) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ となることを A, B を上記のように写像とみなすことにより, 写像の性質 $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ に帰着して証明せよ.

解答 逆行列の公式は成分が複素数の行列にもそのまま成り立つ. したがって,

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$a_{11} = 1, a_{12} = \sqrt{-3}, a_{21} = 1, a_{22} = -3$ のときこの行列は

$$A^{-1} = \frac{1}{-3 - \sqrt{-3}} \begin{pmatrix} -3 & -\sqrt{-3} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

極形式を使うと

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= -3 - \sqrt{-3} \\ &= 2\sqrt{3}(-\frac{\sqrt{3}+i}{2}) = 2\sqrt{3}(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}) \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} -3 &= 3(\cos\pi + i\sin\pi), & -\sqrt{-3} &= -\sqrt{3}i = \sqrt{3}(\cos\tfrac{3\pi}{2} + i\sin 3\pi 2), \\ -1 &= \cos\pi + i\sin\pi, 1 & &= \cos 0 + i\sin 0 \end{aligned}$$

とかけるので,

$$\begin{aligned} &|\frac{-3}{-3-\sqrt{-3}}| = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \arg\frac{-3}{-3-\sqrt{-3}} = \pi - \frac{7\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \\ &\therefore \frac{-3}{-3-\sqrt{-3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}-i}{2} = \frac{3-\sqrt{3}i}{4} \\ &|\frac{-\sqrt{-3}}{-3-\sqrt{-3}}| = \frac{1}{2}, \quad \arg\frac{-\sqrt{-3}}{-3-\sqrt{-3}} = \frac{3\pi}{2} - \frac{7\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \\ &\therefore \frac{-\sqrt{-3}}{-3-\sqrt{-3}} = \frac{1}{2}(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}) = \frac{1+\sqrt{3}i}{4} \\ &|\frac{-1}{-3-\sqrt{-3}}| = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad \arg\frac{-1}{-3-\sqrt{-3}} = \pi - \frac{7\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} \\ &\therefore \frac{-1}{-3-\sqrt{-3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(\frac{\sqrt{3}-i}{2} = \frac{\sqrt{3}-i}{4\sqrt{3}} \\ &|\frac{1}{-3-\sqrt{-3}}| = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \quad \arg|\frac{1}{-3-\sqrt{-3}}| = -\frac{7\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} \;(\mod 2\pi) \\ &\therefore \frac{1}{-3-\sqrt{-3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{-\sqrt{3}+i}{2} = \frac{-\sqrt{3}+i}{4\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3-\sqrt{3}i & 1+\sqrt{3}i \\ 1-\frac{i}{\sqrt{3}} & -1+\frac{i}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

もちろん直接計算した方が速い.
(2) 任意の $a, b \in \mathbf{C}$ に対して

$$A\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

をみたす $z, w \in \mathbf{C}$ が唯一組ある事を示せば良い. 上式の両辺に左から A^{-1} をかけて

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

となり, z, w は唯一組決ってしまうので, A は全単射である.

(3) ここでは結合法則を示す方法で書いておく.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}$$

とするとき (XY)Z=X(YZ) を示す.

$$\begin{aligned}
(XY)Z &= \begin{pmatrix} x_{11}y_{11}+x_{12}y_{21} & x_{11}y_{12}+x_{12}y_{22} \\ x_{21}y_{11}+x_{22}y_{21} & x_{21}y_{12}+x_{22}y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_{11}y_{11}z_{11}+x_{12}y_{21}z_{11}+x_{11}y_{12}z_{21}+x_{12}y_{22}z_{21} & x_{11}y_{11}z_{12}+x_{12}y_{21}z_{12}+x_{11}y_{12}z_{22}+x_{12}y_{22}z_{22} \\ x_{21}y_{11}z_{11}+x_{22}y_{21}z_{11}+x_{21}y_{12}z_{21}+x_{22}y_{22}z_{21} & x_{21}y_{11}z_{12}+x_{22}y_{21}z_{12}+x_{21}y_{12}z_{22}+x_{22}y_{22}z_{22} \end{pmatrix} \\
X(YZ) &= \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_{11}z_{11}+y_{12}z_{21} & y_{11}z_{12}+y_{12}z_{22} \\ y_{21}z_{11}+y_{22}z_{21} & y_{21}z_{12}+y_{22}z_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x_{11}y_{11}z_{11}+x_{11}y_{12}z_{21}+x_{12}y_{21}z_{11}+x_{12}y_{22}z_{21} & x_{11}y_{11}z_{12}+x_{11}y_{12}z_{22}+x_{12}y_{21}z_{12}+x_{12}y_{22}z_{22} \\ x_{21}y_{11}z_{11}+x_{21}y_{12}z_{21}+x_{22}y_{21}z_{11}+x_{22}y_{22}z_{21} & x_{21}y_{11}z_{12}+x_{21}y_{12}z_{22}+x_{22}y_{21}z_{12}+x_{22}y_{22}z_{22} \end{pmatrix} \\
&= (XY)Z
\end{aligned}$$

これより E を単位行列として

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ((AB)B^{-1})A^{-1} = (A(BB^{-1}))A^{-1} = AA^{-1} = E$$

また

$$(B^{-1}A^{-1})AB = (B^{-1}A^{-1}A)B = B^{-1}B = E$$

となり, $B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$ がわかる.

上の計算をシグマ記号で要領良く短く書いた人がいました．とてもいいですね !!

(4) $X = X', Y = Y'$ かつ, 任意の $x \in X$ に対して $f(x) = g(x)$ が成り立つ.
(5) $\mathbf{C}^2$ の任意の元を簡単のため $\vec{x}$ と書く．行列 A を $\mathbf{C}^2$ から $\mathbf{C}^2$ への写像としてみたとき, $f_A(\vec{x}) = A\vec{x}$ と書く．このとき A, B に対して

$$f_{AB}(\vec{x}) = AB\vec{x} = A(B\vec{x}) = f_A(B\vec{x}) = f_A \circ f_B(\vec{x})$$

が任意の $\vec{x} \in \mathbf{C}^2$ に対して成り立っている．したがって

$$f_{AB} = f_A \circ f_B$$

がわかる。特に $\mathbf{C}^2$ の恒等写像を id と書くと $f_E = \mathrm{id}$ である.
(2) より，A が 逆行列 A^{-1} を持つとき，f_A は全単射になるので，逆写像 $(f_A)^{-1} : \mathbf{C}^2 \to \mathbf{C}^2$ がある.
$|A| \neq 0, |B| \neq 0$ のとき逆行列 A^{-1}, B^{-1} があり, $\mathrm{id} = f_E = f_{AA^{-1}} = f_A \circ f_{A^{-1}}$ 同様に

$$f_{A^{-1}} \circ f_A = \mathrm{id}$$

もいえるので $f_{A^{-1}} = f_A^{-1}$ である．これより

$$f_{(AB)^{-1}} = f_{AB}^{-1} = (f_A \circ f_B)^{-1} = f_B^{-1} \circ f_A^{-1} = f_{B^{-1}A^{-1}}$$

つまり任意の $\vec{x} \in \mathbf{C}^2$ に対して

$$(AB)^{-1}\vec{x} = B^{-1}A^{-1}\vec{x}$$

が成り立っている.

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

に対して上の式を使うと, 行列として $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ がわかる.