

数学通論 レポート 4 解答

整数 p を以下固定する. 整数 x, y に対して $x - y$ が p で割りきれることを $x \equiv y \pmod{p}$ と書く. 次の定理を講義で証明した.

定理: $x \equiv x' \pmod{p}, y \equiv y' \pmod{p}$ ならば $x \pm y \equiv x' \pm y' \pmod{p}$ および $xy \equiv x'y' \pmod{p}$ が成立する.

この定理により \equiv は $=$ に似た性質を持つことがわかる.

問 4.1 1. $10!$ を 11 で割った余りを求めよ.

2. プリント p.300 B.635 を自習して, 同値関係 \sim の定義を書きなさい.

3. $x \equiv y \pmod{7}$ で同値関係 $x \sim y$ を定義するとき, 5 と同値な \mathbf{Z} の元をすべて求めよ.

解答 1.

$$6 \equiv -5 \pmod{11}$$

$$7 \equiv -4 \pmod{11}$$

...

$$10 \equiv -1 \pmod{11}$$

を用いると $10! \equiv (5!)^2(-1)^5 \pmod{11}$. $5! = 120 \equiv 10 \pmod{11}$. よって答は -100 を 11 で割った余りで, 10 である.

2 はプリント参照.

3.

$$[5] = \{\dots, -9, -2, 5, 12, \dots\} = \{5 + 7n \mid n \in \mathbf{Z}\}$$

ただし, $[j]$ は j と同値な元の全体の集合を表す.

問 4.2 1. ユークリッドの互除法 (ユークリッドのアルゴリズム) を説明しなさい.

省略 前回講義で解説しました.

問 4.3 $x = 1022117$ と $y = 1030189$ の最大公約数 d をユークリッドの互除法を用いて求めなさい. $ax + by = d$ となる数の組 (a, b) を一つ求めよ. x と y の素因数分解を計算せよ. (google は電卓にもなります. - 高山先生談 -)

解答

Step 1. 互除法での a, b, q, r の表. ここで $a = qb + r$, r は余り.

[1022117, 1030189, 0, 1022117]

[1030189, 1022117, 1, 8072]

[1022117, 8072, 126, 5045]

[8072, 5045, 1, 3027]

[5045, 3027, 1, 2018]

[3027, 2018, 1, 1009]

[2018, 1009, 2, 0]

よって, $d = 1009$.

Step 2.

$$3027 + (-1)2018 = 1009$$

$$-1 * 5045 + (1 - (-1) * 1)3027 = 1009$$

$$2 * 8072 + (-1 - (2) * 1)5045 = 1009$$

$$-3 * 1022117 + (2 - (-3) * 126)8072 = 1009$$

$$80 * 1030189 + (-3 - (380) * 1)1022117 = 1009$$

$$-383 * 1022117 + (380 - (-383) * 0)1030189 = 1009$$

[-383, 380]