数学通論 レポート 7 解答

問 7.1 プリントの問について答えよ.

1. p.272 問 2 と問 3
2. p.273 問 4, 問 5, 問 6
3. p.275 問 1 と 問 2
4. p.276 問 3, 問 4, 問 5

[p.272 問 2] 全体集合を $\mathbf{R}$ として次の各条件の真理集合を求めよ.
1) $\{x \in \mathbf{R} \mid x < 2$ かつ $x > 1\}$ 2) $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 2$ かつ $x < 1\}$
3) $\{x \in \mathbf{R} \mid x = 2$ かつ x は有理数 $\}$ 4) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 < 6$ かつ x は 2 の倍数 $\}$

解答
1) $\{x \in \mathbf{R} \mid x < 2$ かつ $x > 1\} = (-\infty, 2) \cap (1, \infty) = (1, 2)$
2) $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 2$ かつ $x < 1\} = (2, \infty) \cap (-\infty, 1) = \emptyset$
3) $\{x \in \mathbf{R} \mid x = 2$ かつ x は有理数 $\} = \{2\}$
4) $\{x \in \mathbf{R} \mid x^2 < 6$ かつ x は 2 の倍数 $\} = (-\sqrt{6}, \sqrt{6}) \cap \{2n \mid n \in \mathbf{Z}\} = \{-2, 0, 2\}$

[p.272 問 3] 全体集合を $\mathbf{R}$ として次の各条件の真理集合を求めよ.
1) $\{x \in \mathbf{R} \mid x = 2$ または $x > 2\}$ 2) $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 1$ または $x < 2\}$

解答
1) $\{x \in \mathbf{R} \mid x = 2$ または $x > 2\} = [2, \infty)$
2) $\{x \in \mathbf{R} \mid x > 1$ または $x < 2\} = (1, \infty) \cup (-\infty, 2) = \mathbf{R}$

解説　真理集合を求めよと言う問題ですから，答えは集合の形で書きましょう．$x = 2$ や $x \geq 2$ とだけ書くのは問われていることと別のことを答えています．また，最後の問題で

$$\{x \in \mathbf{R} \mid x > 1 \text{ または } x < 2\}$$

ですましているのは，間違ってはいませんが，不満です.
[p.273 問 4] 全体集合を $\mathbf{N}$ （自然数全体）とするとき, 次の各条件の否定の真理集合を求めよ.
1) x は 2 より大きい.

解答
$\{x \in \mathbf{N} \mid \neg[x > 2]\} = \{x \in \mathbf{N} \mid x \leq 2\} = \{1, 2\}$
2) x は 100 以下の奇数である.

解答

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbf{N} \mid \neg([x \leq 100] \wedge [x \text{ は奇数 }])\} &= \{x \in \mathbf{N} \mid [x > 100] \vee [x \text{ は偶数 }]\\ &= \{x \in \mathbf{N} \mid \ x \text{ は 100 より大または偶数 }\}\end{aligned}$$

3) $0.1 < x < 99.9$

解答
$\{x \in \mathbf{N} \mid \neg[0.1 < x < 99.9]\} = \{x \in \mathbf{N} \mid [x \leq 0.1] \vee [x \geq 99.9]\} = \{x \in \mathbf{N} \mid x \geq 100\}$
4) x は無理数である.

解答
$\{x \in \mathbf{N} \mid \neg[\ x$ は無理数である$]\} = \{x \in \mathbf{N} \mid \ x$ は有理数である $\} = \mathbf{N}$

[p.273 問 5] $P(x), Q(x)$ が同一の X を全体集合にもつ条件の時

1) $\{x \mid \neg(P(x) \wedge Q(x))\} = \{x \mid (\neg P(x)) \vee (\neg Q(x))\} = \{x \mid \neg P(x)\} \cup \{x \mid \neg Q(x)\}$ を導け.
解答

$$\begin{aligned}\{x \mid \neg(P(x) \wedge Q(x))\} &= \{x \mid P(x) \wedge Q(x)\}^c \\ &= (\{x \mid P(x)\} \cap \{x \mid Q(x)\})^c \\ &= \{x \mid P(x)\}^c \cup \{x \mid Q(x)\}^c \\ &= \{x \mid \neg P(x)\} \cup \{x \mid \neg Q(x)\} \\ &= \{x \mid (\neg P(x)) \vee (\neg Q(x))\}\end{aligned}$$

[p.273 問 6] 全体集合を $\mathbf{R}$ とし,

$$P(x) : x \geq 1 \qquad Q(x) : x \leq 2$$

とするとき, 上の定理の 1) の成立を確かめよ.
解答

$$\begin{aligned}\{x \in \mathbf{R} \mid \neg(P(x) \wedge Q(x))\} &= \{x \in \mathbf{R} \mid [x \geq 1] \wedge [x \leq 2]\}^c \\ &= [1,2]^c = (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \\ \{x \in \mathbf{R} \mid (\neg P(x)) \vee (\neg Q(x))\} &= \{x \in \mathbf{R} \mid [x < 1] \vee [x > 2]\} \\ &= (-\infty, 1) \cup (2, \infty) \\ \{x \in \mathbf{R} \mid \neg P(x)\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid \neg Q(x)\} &= \{x \in \mathbf{R} \mid x < 1\} \cup \{x \in \mathbf{R} \mid x > 2\} \\ &= (-\infty, 1) \cup (2, \infty)\end{aligned}$$

解説　$\{x \mid x < 1, 2 < x\}$ などと書いた人が多かったのですが, コンマ「,」は「かつ」の意味で使います. ところが,「かつ」と「または」両方の意味でコンマを使う人もいました. これではどちらを言いたいのか見た人はわからなくなります.
[p.275 問 1] 次の各項の条件を $P(x)$ とするとき, 命題 $\forall x \quad P(x)$ の真偽をいえ. ただし, 全体集合としては $\mathbf{R}$ をとるものとする.
1) $x^2 + x + 1 \geq 0$
解答
任意の $x \in \mathbf{R}$ に対して, $x^2 + x + 1 = (x + 1/2)^2 + 3/4 \geq 0$ なので 命題 $[\forall x \quad P(x)]$ は真
2) $x^2 > 0$
解答
全体集合が $\mathbf{R}$ だから, $x = 0$ のとき $x^2 = 0$ となり命題 $[\forall x P(x)]$ は偽

[p.275 問 2] 変数 x, y のそれぞれの全体集合を $\mathbf{R}$ として次の各命題の真偽をいえ.
1) $\forall x \forall y \quad x^2 + xy + y^2 \geq 0$
解答
$x, y \in \mathbf{R}$ のとき,

$$x^2 + xy + y^2 = (x + y/2)^2 + (3/4)y^2 \geq 0$$

より, 命題 $[\forall x \forall y \quad x^2 + xy + y^2 \geq 0]$ は真
2) $\forall x \forall y \quad \sin(x + y) \leq 1$
解答
任意の実数 ξ に対して $\sin \xi \leq 1$ だから命題 $[\forall x \forall y \quad \sin(x + y) \leq 1]$ は真
3) $\forall x \forall y \quad x > y$ または $x < y$

解答
$x = y$ のとき $[x > y$ または $x < y]$ はなりたたないので命題 $[\forall x \forall y \quad x > y$ または $x < y]$ は偽

[p.276 問 3] 次の各項の条件を $P(x)$ とするとき命題 $\exists x\ P(x)$ の真偽を言え．ただし, 全体集合としては $\mathbf{R}$ をとるものとする．
解答
1) $x^2 + x - 1 = 0$ [真: この 2 次方程式は実数解 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ をもつ]
2) $x^2 < 0$ [偽：すべての実数は 2 乗すると非負になる]
3) $x^2 \leq 0$ [真：すべての実数は 2 乗すると非負になる]
4) $10^x = 3$ [真： $x = \log_{10} 3$ ととるとこの式が成立]
5) $10^x = -1$ [偽： $10^x > 0$ がすべての実数 x に対して成立]

[p.276 問 4] 次の命題の反例を一つあげよ．ただし, 全体集合としては $\mathbf{R}$ をとるものとする．
解答
1) $\forall x \quad x^2 > 0$： 反例 $x = 0$
2) $\forall x \quad x^2$ は有理数である：反例 $x = \sqrt[4]{2}$.

[p.276 問 5] $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ について次の各命題の否定を言え
解答
1) $\neg$ [任意の x に対して $f(x) \geq 0] = [$ ある x に対して $f(x) < 0]$
2) $\neg$ [ある x に対して $f(x) = 0] = [$ 任意の x に対して $f(x) > 0$ または $f(x) < 0$]