数学通論 レポート 8 解答

問 8.1 プリントの問について答えよ．

1. p.279 問 2：次の各条件の真理集合の包含関係を考える事によって，各条件のうち一方が他方の必要条件，十分条件になっているものを選び，どちらが必要条件でどちらが十分条件であるかをいえ．ただし，全体集合を $\mathbf{R}$ とする．

$$\begin{array}{lll} 1)x=1 & 2)x=\sqrt{2} & 3)x\geq 1 \\ 4)x^2=2 & 5)(x^2-1)(x^2-2)=0 & 6)x=\sqrt{2}\text{または}\, x=-\sqrt{2} \end{array}$$

解答　それぞれの真理集合をみると

1) $A_1=\{x\mid x=1\}=\{1\}$,　2) $A_2=\{x\mid x=\sqrt{2}\}=\{\sqrt{2}\}$　3) $A_3=\{x\mid x\geq 1\}=[1,\infty)$

4) $A_4=\{x\mid x^2=2\}=\{\sqrt{2},-\sqrt{2}\}$　5) $A_5=\{x\mid (x^2-1)(x^2-2)=0\}=\{-\sqrt{2},-1,1,\sqrt{2}\}$

6) $A_6=\{x\mid x=\sqrt{2}\text{または}\, x=-\sqrt{2}\}=\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}$

となり，$A_1,A_2\subset A_3$,　$A_6=A_4\subset A_5$,　$A_1,A_2\subset A_5$,　$A_2\subset A_4,A_5,A_6$ がわかる．

これにより，

1) は 3) と 5) の十分条件　2) は 3),4),5),6) の十分条件　3) は 1) と 2) の必要条件　4) と 6) は必要十分条件で 2) の必要条件であり 5) の十分条件　5) は 1),2),4),6) の必要条件

がわかる．

p.279 問 3： x,y を実数とするとき，

[$x^2+y^2\leq x$ は $x^2+y^2\leq 1$ であるための十分条件である]

事を示せ．

解答　$x^2+y^2\leq x \Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2+y^2\leq\frac{1}{4}$ であり，これは中心 $(\frac{1}{2},0)$ で半径 $\frac{1}{2}$ の円の内部を (x,y) が動く事を意味している．この円板は円板 $x^2+y^2\leq 1$ の内部である。したがって (x,y) はこのとき $x^2+y^2\leq 1$ を満たす．すなわち $\forall x,y\quad x^2+y^2\leq x\Rightarrow x^2+y^2\leq 1.$ が真である．

p.279 問 4： $Q(x)$ が $P(x)$ の必要条件であり，$R(x)$ が $Q(x)$ の必要条件ならば $R(x)$ は $P(x)$ の必要条件である事を証明せよ．

解答　真理集合で比較する．全体集合 X は固定しておく．

$P(x)\Rightarrow Q(x)$ より $\{x\mid P(x)\}\subset\{x\mid Q(x)\}$

$Q(x)\Rightarrow R(x)$ より $\{x\mid Q(x)\}\subset\{x\mid R(x)\}$

となり，　このふたつから $\{x\mid P(x)\}\subset\{x\mid R(x)\}$

つまり $P(x)$ は $R(x)$ のための十分条件．($R(x)$ は $P(x)$ の必要条件)

p.280 問 5： 全体集合を $\mathbf{R}$ として，[$\forall x\ (x^2>1\Rightarrow x>1)$] の反例をあげよ．

$[\forall x\in\mathbf{R}, x^2>1\Rightarrow x>1]$ は偽の命題である．これは反例として $x=-2$ を考えれば良い．($(-2)^2=4>1$ かつ $-2<1$)

p.280 問 6 全体集合として $\mathbf{R}$ を定義域とする実数値関数 $f(x)$ 全体をとるとき，$\forall f[\forall x\in\mathbf{R}, f(x)\geq 0\Rightarrow (f(x)$ の最小値が 0 $)]$ の反例をあげよ．

解答　反例を考えるために

$$P(x): \forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0, \qquad Q(x): f(x) \text{ の最小値が } 0$$

と書く事にすると $[\neg(\neg P(x) \vee Q(x))] = [P(x) \wedge \neg Q(x)]$ をみたす関数 $f(x)$ をとれば良い．つまり $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) \geq 0$ かつ $f(x)$ の最小値は 0 でない様な 関数 $f(x)$ を考えれば良く，

$f(x) = e^x$ は最小値をとらないのでこの反例になっている．また

$f(x) = x^2 + 1$ は最小値が 1 なのでこの反例になっている．