数学通論 レポート 9 解答　2013 年 7 月 10 日

問 9.1.　1. “平面”: $\{(x,y)\mid y>0\}$ （ x 軸を含まないことに注意 !)
“直線”: x 軸に中心を持つ円, または x 軸に直行する上半平面の直線
のとき, 点 $(0,1), (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ を通る” 直線” の式を

$$(x-a)^2+y^2=r^2$$

とすると、

$$(0-a)^2+1=r^2 \quad \text{および} \tag{1}$$

$$(\frac{1}{\sqrt{2}}-a)^2+\frac{1}{2}=r^2 \tag{2}$$

がなりたつ. (1) から (2) を引いて、$-a\sqrt{2}=0$ を得るので, $a=0$. これを (1) に代入して $r^2=1$, すなわち $r=1$ がでる. 求める “直線” の式は, したがって

$$x^2+y^2=1\ (y>0)\ \ \text{つまり}\ \ y=\sqrt{1-x^2}$$

(図は省略)

2. 線分は直線上の 2 点を結ぶ部分だから、2 点 A,B を通る x 軸に中心を持つ円を描いたとき、弧 AB が A,B を結ぶ” 線分” である.
(図は省略)

3.
   - 始めに, x 軸に中心を持つ二つの円が交わるとき, 一つの交点は上半平面に, もう一つの交点はこれと x 軸に関して対称な点が下半平面にあることに注意する.
   - したがって, 二つの” 直線” は唯一点で交わるか, 交わらないかどちらかである.
   - 2 点 A,B を与えられた上半平面の半円 $C:(x-a)^2+y^2=r^2$ に対して同じ側にあるとする. $(x-a)^2+y^2>r^2$ にあるとしても一般性は失われない. この 2 点を通る “直線”ℓ （つまり半円）が $C:(x-a)^2+y^2=r^2$ と交わるとすると, この半円 ℓ 上で A から B に連続的に進むとき、途中で $(x-a)^2+y^2<r^2$ となるところがある（交わった直後）.
   - ところが B でも $(x-a)^2+y^2>r^2$ なので, もう一度 ℓ は C と交わらなくてはいけない. つまり, C と ℓ は上半平面で 2 点を共有することになり, 公理 1 （これは確かめた）から C と ℓ は一致する。ℓ は A,B を含むので, A,B が C 上にないと仮定したことと矛盾している.
   - したがって A,B を結ぶ ” 線分” ℓ は C と交わらない.
   - A,B が違う側にあれば, 上と同じ理由で A から B に ℓ に沿って進むとき, 途中で $(x-a)^2+y^2=r^2$ となる点がある. この点は C 上の点.
   (「ユークリッド幾何学のなかに非ユークリッド幾何学がある」といわれる。)

4. パラメータ付けは $x=c+r\cos t,\ y=r\sin t,\ (0<t<\pi)$ とできるので, これで考えると,

$$\begin{aligned} d\big((a,b),(a',b')\big) &= \int_p^{p'} \frac{\sqrt{r^2\sin^2 t+r^2\cos^2 t}}{r\sin t}dt \\ &= \int_p^{p'} \frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}\tan\frac{t}{2}}dt \\ &= \int_{\tan\frac{p}{2}}^{\tan\frac{p'}{2}} \frac{1}{u}du \quad (u=\tan\frac{t}{2}\ \text{と変数変換}\ ) \\ &= \log\frac{\tan\frac{p'}{2}}{\tan\frac{p}{2}} \end{aligned}$$

ただし, $0<t<\pi$ では $\cos t$ が単射なので,

$$\begin{aligned} a &= c+r\cos p \\ b &= r\sin p \\ a' &= c+r\cos p' \\ b' &= r\sin p' \end{aligned}$$

から $p=\cos^{-1}\frac{a-c}{r},\ p'=\cos^{-1}\frac{a'-c}{r}$ となる.

問 9.2. 平行線の公理が成立していないことは, 例えば $C : x^2 + y^2 = 1$ 上にない点 $(0,2)$ を通る円で $D : x^2 + y^2 = 4$ のほかに, $E : (x-a)^2 + y^2 = a^2 + 4$ を考えて, C と E を連立して実数解を持たない条件を調べると

$$x^2 - (x-a)^2 = -a^2 - 3$$

これを解くと $2ax = -3$ つまり $a \neq 0$ として $x = -3/2a$. これを $x^2 + y^2 = 1$ に代入すると $y^2 = 1 - 9/(4a^2)$. したがって $|a| < 3/2$ のとき C, E を同時に満たす $x, y(y > 0)$ はない. たとえば, $a = 1$ として $(x-1)^2 + y^2 = 5$ は $(0,2)$ を通り C と交わらない.
（図は省略）
最後に、平行線の公理がなりたたないので、平行線に関する定理がなりたたなくなります。例えば
「同位角は等しい」
はなりたちません。

[解説]　問 9.1 では 4 番で $p = \arcsin\frac{b}{r}$ と $\sin t$ の逆関数を使った解答がいくつかありましたが，上半平面なので，$\sin x$ は正の値を取り，中心より左と右に同じ値を取る点が二つ現れます．したがって逆関数 $\arcsin y$ で対応しているのは中心より右側の部分になってしまいます.
問 9.2 では昨年の模範解答と同じ間違いをした人が数人いました．模範解答が間違っていたのは私の責任ですが,「変だな」と思わなかったのは彼らの責任です．ミスプリもありますし，模範解答といえども考え方の参考程度にしてください．大事なのは自分で考えることです.