

## 数理統計学まとめ (その7): 第4章 母集団と標本

### 4 正規分布から導かれる標本分布

#### 4.1 カイ 2 乗分布 ( $\chi^2$ -分布)

母集団が標準正規分布  $N(0, 1)$  に従うとき, 大きさ  $n$  の無作為標本  $X_1, \dots, X_n$  に対して

$$X = \sum_{j=1}^n X_j^2$$

が自由度  $n$  のカイ 2 乗分布に従う. その分布密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{n/2-1} e^{-x/2} \quad (x > 0)$$

となる. ただし,  $m > 0$  に対して

$$\Gamma(m) = \int_0^{\infty} x^{m-1} e^{-x} dx$$

をガンマ関数という.  $\Gamma(m)$  は

$$\Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$$

を満たす. これを使うと自由度  $\nu$  のカイ 2 乗分布の平均と分散はそれぞれ  $\nu$  と  $2\nu$  になることがわかる.

定理 4.1 (教科書 p.87 定理 4.5)

母集団が正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  に従うとき, 無作為標本  $X_1, \dots, X_n$  に対して,

$$Y = \frac{1}{\sigma^2} ((X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2)$$

は自由度  $n-1$  のカイ 2 乗分布に従う.

#### 4.2 ティー分布 ( $t$ -分布)

確率変数  $X$  と  $Y$  が独立で,  $X$  が  $N(0, 1)$  に従い,  $Y$  が自由度  $\nu$  のカイ 2 乗分布に従うとき,

$$T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{\nu}}}$$

は自由度  $\nu$  のテュー分布 ( $t$ -分布)  $t_\nu$  に従う. このとき  $T$  の分布密度関数は

$$f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\nu\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad (-\infty < t < \infty)$$

となる.

定理 4.2 (教科書 p.89 定理 4.6) 母集団が正規分布  $N(\mu, \sigma^2)$  に従うとき, 無作為標本  $X_1, \dots, X_n$  に対して, 標本平均  $\bar{X}$  と

$$Y = \frac{1}{\sigma^2} ((X_1 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2)$$

は独立であり, したがって

$$T = \frac{\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma}}{\sqrt{\frac{Y}{n-1}}}$$

は自由度  $n-1$  のテュー分布 ( $t$ -分布)  $t_{n-1}$  に従う.

$$U^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

を使うと<sup>1</sup>,

$$(n-1)U^2 = \sigma^2 Y$$

となるので

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2 Y}{n(n-1)}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{U^2}{n}}}$$

となる.

$$E(T) = 0 \quad (\nu \geq 2), \quad V(T) = \frac{\nu}{\nu-2} \quad (\nu \geq 3)$$

となる.

---

<sup>1</sup> $U^2$  は不偏標本分散と呼ばれる

### 4.3 エフ分布 (F-分布)

確率変数  $X_1, X_2$  が独立で, それぞれ自由度  $\nu_1, \nu_2$  のカイ 2 乗分布に従うとき

$$F = \frac{\frac{X_1}{\nu_1}}{\frac{X_2}{\nu_2}}$$

は自由度  $\nu_1, \nu_2$  の F 分布  $F_{\nu_2}^{\nu_1}$  に従うと言う. その分布密度関数は

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu_2}{2}\right)} \left(\frac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}} x^{\frac{\nu_1-2}{2}} \left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2}x\right)^{-\frac{\nu_1 + \nu_2}{2}} \quad (x > 0)$$

となる.

$$E(F) = \frac{\nu_2}{\nu_2 - 2} \quad (\nu_2 \geq 3)$$

$$V(F) = \frac{2\nu_2^2(\nu_1 + \nu_2 - 2)}{\nu_1(\nu_2 - 2)^2(\nu_2 - 4)} \quad (\nu_2 \geq 5)$$

定理 4.3 (教科書 p.91, 定理 4.7)

自由度  $(\nu_1, \nu_2)$  の F-分布と  $(\nu_2, \nu_1)$  の F-分布との間には次の関係が成り立つ.

$$F_{\nu_2}^{\nu_1}(1 - \alpha) = \frac{1}{F_{\nu_1}^{\nu_2}(\alpha)}$$

ただし,  $F_{\nu_2}^{\nu_1}(\alpha)$  は  $F$  が自由度  $(\nu_1, \nu_2)$  の F-分布に従うとき,

$$P(F \geq F_{\nu_2}^{\nu_1}(\alpha)) = \alpha$$

となる値として定義する.

証明  $X$  を自由度  $\nu_1$  のカイ 2 乗分布に従う確率変数とし,  $Y$  をこれと独立な自由度  $\nu_2$  のカイ 2 乗分布に従う確率変数とする. このとき

$$F = \frac{\frac{Y}{\nu_2}}{\frac{X}{\nu_1}}$$

が自由度  $(\nu_2, \nu_1)$  の F-分布に従うので,

$$\begin{aligned} \alpha &= P(F \geq F_{\nu_2}^{\nu_1}(\alpha)) \\ &= P\left(\frac{Y}{X} \frac{\nu_1}{\nu_2} \geq F_{\nu_2}^{\nu_1}(\alpha)\right) \\ &= P\left(\frac{X}{Y} \frac{\nu_2}{\nu_1} \leq \frac{1}{F_{\nu_2}^{\nu_1}(\alpha)}\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{1}{F} \geq \frac{1}{F_{\nu_2}^{\nu_1}(\alpha)}\right) \end{aligned}$$

$\frac{1}{F}$  は自由度  $(\nu_1, \nu_2)$  の  $F$ -分布だから，上の式は

$$F_{\nu_2}^{\nu_1}(1 - \alpha) = \frac{1}{F_{\nu_1}^{\nu_2}(\alpha)}$$

を意味している．

例 4.1 (教科書 p.87 例題 4.6) 自由度が 10 のカイ 2 乗分布に従う確率変数  $X$  に対して

$$P(X \geq a) = 0.05$$

を満たす  $a$  (上側 5 % 点) を求める．教科書の巻末の付表 3 を見て左端の欄の自由度が 10 となっているところを横に見る．このうち，一番上の欄の  $\alpha$  が .05 となっている列を下がり，自由度 10 の行と交わるところを見ると， $a = 18.307$  がわかる．

同じ調子で自由度 8 のカイ 2 乗分布に従う確率変数  $X$  に対して上側 2.5 % 点を求めると，17.535 となる．

表に載っていない上側  $\alpha$  点 (  $100\alpha$  % 点 ) を求めるときは比例配分による．例えば，自由度 20 のカイ 2 乗分布に従う確率変数  $X$  に対して

$$P(X \geq a) = 0.08$$

を求めるには，上側 10 % 点が 28.412 で 5 % 点が 31.410 なので，比例配分して上側 8 % 点は  $28.412 + \frac{2}{5} \times (31.410 - 28.412) = 29.611$  と求めれば良い．表の数字は小数点以下 3 桁なので，結果も小数点以下 3 桁より詳しくは求められない．というのは，すでに表を作る時点で次の桁以下は丸められているので．