4.7 曲面と曲面積

4.7.1 なめらかな曲面

3 次元空間内の曲面は二つのパラメータ u, v を用いて

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v) \tag{7}$$

の形に表される．

例 4.10 もっとも簡単な場合として，2 変数の関数 $f(x,y)$ を用いて

$$z = f(x,y)$$

のグラフが作る曲面を考えると，これは $x = u,\ y = v,\ z = f(u,v)$ と分けて書くと (7) の形で表されている．

例 4.11 もう少し自明でない例としては

$$x = \cos\theta\sin\phi,\ y = \sin\theta\sin\phi,\ z = \cos\phi$$

が考えられる．これは原点を中心とし半径 1 の球面上の点を表している．ただし， θ, ϕ を自由にすると同じ球面上の点を何回も表すので，1 対 1 に表すには $0 \leq \theta < 2\pi,\ 0 \leq \phi < \pi$ で考えればいいことは極座標への変数変換のときに示した通り．

これを参考に，一般の「なめらかな」曲面を定義する．

定義 4.4 $D \subset \mathbb{R}^2$ が有界な閉集合で，その境界が有限個の C^1-級の曲線でできているものとする．このとき D を含む開集合 E 上で定義された C^1 級の写像：

$$\Phi : (u,v) \in E \mapsto (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \Phi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

が与えられ，条件

$$\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2 > 0 \tag{8}$$

を満たすとき，集合

$$S = \{(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\,;\,(u,v) \in D\} \tag{9}$$

を空間 $\mathbb{R}^3$ 内のなめらかな曲面と呼ぶ．

4.7.2 曲面の接平面

(9) で与えられるなめらかな曲面 S 上の点 $(x_0, y_0, z_0) = (x(u_0, v_0), y(u_0, v_0), z(u_0, v_0))$ において，u を動かした曲線 $x = x(u, v_0), y = y(u, v_0), z = z(u, v_0)$ の (x_0, y_0, z_0) での接ベクトル

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\right)$$

と v を動かした時の接ベクトル

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\right)$$

の二つが張る平面を，曲面 S の点 (x_0, y_0, z_0) における接平面という．条件 (8) は二つの接ベクトルが一次独立でゼロにならないことを保証している．接平面の方程式は

$$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& x_0 + x_u(u_0, v_0)a + x_v(u_0, v_0)b \\ y &=& y_0 + y_u(u_0, v_0)a + y_v(u_0, v_0)b \\ z &=& z_0 + z_u(u_0, v_0)a + z_v(u_0, v_0)b \end{array}\right.$$

と二つのパラメータ a, b を使って表すことができる．これから a, b を消去して

$$(x-x_0)\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u_0, v_0)+(y-y_0)\frac{\partial(z,x)}{\partial(u.v)}(u_0, v_0)+(z-z_0)\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0, v_0) = 0$$

も接平面の方程式としてよく知られている．この式から

$$\left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u_0, v_0), \frac{\partial(z,x)}{\partial(u.v)}(u_0, v_0), \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0, v_0)\right)$$

は曲面 S の点 (x_0, y_0, z_0) での法線ベクトルの実数倍になっていることが分かる．

4.7.3 曲面積

なめらかな曲面 $S : (u, v) \in D \mapsto \Phi(u, v) = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ が与えられ，$(u, v) \mapsto (x, y, z)$ の対応が D で 1 対 1 であるとする． S 上の微小な平行四辺形

$$\Phi(u_0, v_0), \Phi(u_0 + \Delta u, v_0), \Phi(u_0, v_0 + \Delta v), \Phi(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$$

の面積は**近似的に**二つの接ベクトル

$$(x_u(u_0,v_0), y_u(u_0,v_0), z_u(u_0,v_0))\,\Delta u, \quad (x_v(u_0,v_0), y_v(u_0,v_0), z_v(u_0,v_0))\,\Delta v$$

が作る平行四辺形の面積に等しく，

$$\sqrt{\left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)\right)^2}\Delta u \Delta v$$

となる．従って曲面 S の曲面積は

$$|S| = \int_D \sqrt{K(u,v)}dudv$$

と定義される．ただし，

$$K(u,v) = \left(\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right)^2$$

である．

例 4.12 (教科書 例題 5.19)
半径 a の球面の表面積 $A(S)$ を求める．教科書のように $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ を使ってもよいが，ここでは極座標表示

$$x = a\cos\theta\sin\phi,\ y = a\sin\theta\sin\phi,\ z = a\cos\phi \quad ((\theta,\phi) \in [0,2\pi) \times [0,\pi))$$

を使ってみよう．

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} -a\sin\theta\sin\phi & a\cos\theta\cos\phi \\ a\cos\theta\sin\phi & a\sin\theta\cos\phi \end{vmatrix} = -a^2\cos\phi\sin\phi$$

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta\sin\phi & a\sin\theta\cos\phi \\ 0 & -a\sin\phi \end{vmatrix} = -a^2\cos\theta\sin^2\phi$$

$$\frac{\partial(z,x)}{\partial(\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} 0 & -a\sin\phi \\ -a\sin\theta\sin\phi & a\cos\theta\cos\phi \end{vmatrix} = -a^2\sin\theta\sin^2\phi$$

なので，

$$\begin{aligned} K(\theta,\phi) &= a^4\left(\cos^2\phi\sin^2\phi + \cos^2\theta\sin^4\phi + \sin^2\theta\sin^4\phi\right) \\ &= a^4\sin^2\phi \end{aligned}$$

となり，

$$|S| = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} a^2 |\sin\phi| d\phi \right) d\theta = 4\pi a^2$$

を得る.（曲面積はパラメータの表し方によらない）

練習 4.6 半径 a の半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ $(x^2 + y^2 \leq a^2)$ のうち円柱 $x^2 + y^2 \leq ax$ の内部にある曲面積を求めよ.（パラメータづけは $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = \sqrt{a^2 - r^2}$ とする．ただし， $0 \leq r \leq a, 0 \leq \theta < 2\pi$）