

3.4 部分積分

定理 3.11 (部分積分法) f, g が連続な導関数をもつとき

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \quad (2)$$

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx \quad (3)$$

証明は積の微分公式

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

を積分すればよい.

例 3.3 (教科書例 3.6)

$$\int \log x dx = \int 1 \cdot \log x dx = x \log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \log x - x + C$$

ただし, $x > 0$ とする.

$$\int_1^e \log x dx = [x \log x]_1^e - \int_1^e dx = 1$$

例 3.4 (教科書例 3.7)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a} dx &= x\sqrt{x^2 + a} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}} dx \\ &= x\sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a} dx + \int \frac{a}{\sqrt{x^2 + a}} dx \\ &= x\sqrt{x^2 + a} - \int \sqrt{x^2 + a} dx + a \log |x + \sqrt{x^2 + a}| + C \end{aligned}$$

よって移項すると

$$\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{1}{2} [x\sqrt{x^2 + a} + a \log |x + \sqrt{x^2 + a}|] + C$$

例 3.5 (教科書例 3.9)

$$\begin{aligned} \int e^{ax} \sin bxdx &= \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bxdx \\ &= \frac{e^{ax}}{a} \sin bx - \frac{b}{a^2} e^{ax} \cos bx - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bxdx \end{aligned}$$

右辺最後の項を移項すると，不定積分であることに注意して

$$\frac{a^2 + b^2}{a^2} \int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2} + C$$

よって

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} + C$$

と書くことができる．

例 3.6 $\int \operatorname{Arctan} x dx$ を計算する．

$$\int \operatorname{Arctan} x dx = x \operatorname{Arctan} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

と部分積分した後， $t = 1 + x^2$ とおくと， $dt = 2x dx$ だから，

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = \frac{1}{2} \log |t| + C = \frac{1}{2} \log |1+x^2| + C$$

となり，

$$\int \operatorname{Arctan} x dx = x \operatorname{Arctan} x - \frac{1}{2} \log |1+x^2| + C$$

を得る．これは $\log x$ の不定積分を求めるのに似ている．

例 3.7 (教科書 例 3.10) $a \neq 0, n = 1, 2, \dots$ のとき

$$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

を計算する．すでに $n = 1$ の時は

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Arctan} \frac{x}{a} + C$$

を知っている． $n \geq 2$ の時を求めるために I_n の満たす漸化式を求める．

$n \geq 1$ として，部分積分をすると

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \int \frac{2nx^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\ &= \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2nI_n - 2na^2 I_{n+1} \end{aligned}$$

整理して $n+1$ を n と書き直すと

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \left[\frac{x}{(x^2 + a^2)^{n-1}} + (2n-3)I_{n-1} \right]$$

という漸化式が $n \geq 2$ で正しい．

練習 3.6 次の不定積分を計算せよ .

$$(1) \int x \sin 2x \, dx \quad (2) \int x^3 \log x \, dx \quad (3) \int x \operatorname{Arctan} x \, dx \quad (4) \int x \cos^2 x \sin x \, dx$$

練習 3.7 (1) 定積分

$$\int_0^1 x^2 e^{-x} \, dx$$

を計算せよ .

(2) $n \geq 1$ に対して , 定積分

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^n}$$

を計算せよ