5　重積分

これから変数をたくさん持つ関数についての積分を勉強する．基本は 1 変数の積分だから恐れる必要はない．

5.1　長方形上の重積分

R を長方形 $[a,b]\times[c,d] := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\, c\le y\le d\}$ とする。R 上で定義された有界な関数 $f=f(x,y)$ の定積分

$$\int_R f(x,y)\,dxdy$$

を以下の手順で定義する。

1°　区間 $[a,b]$ と $[c,d]$ の分割を

$$\Delta_1 = \{a = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = b\}$$
$$\Delta_2 = \{c = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = d\}$$

をとり、

$$\Delta = \Delta_1\times\Delta_2 = \{C_{i,j} = [s_{i-1}, s_i]\times[t_{j-1}, t_j] : 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$$

を R の分割とする。分割 Δ の幅 $|\Delta|$ を $\max\{|\Delta_1|, |\Delta_2|\}$ と定める。

2° 過剰和 $\overline{S}_\Delta$ と不足和 $\underline{S}_\Delta$ を、

$$\overline{S}_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{i,j}|s_i - s_{i-1}||t_j - t_{j-1}|$$
$$\underline{S}_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}|s_i - s_{i-1}||t_j - t_{j-1}|$$

とする。ただし、

$$M_{i,j} = \sup\{f(x,y)\,;\,(x,y)\in C_{i,j}\}$$
$$m_{i,j} = \inf\{f(x,y)\,;\,(x,y)\in C_{i,j}\}$$

とする。

3° 一変数の時と同じようにして

$$\lim_{|\Delta|\to 0} \overline{S}_\Delta = \lim_{|\Delta|\to 0} \underline{S}_\Delta$$

となるときに f は R 上積分可能といい、この極限の値を

$$\int_R f(x,y)\,dxdy$$

とかく。

4° f が R で連続ならば積分可能となる。

5.2 一般の集合上の重積分

E を $\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合とする。$f = f(x,y)$ が E 上で定義された関数の時、$E \subset R$ となる長方形 R に対して f を R 上に拡張した関数 $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (x,y) \in E \\ 0 & (x,y) \notin E \end{cases}$$

とおく。このとき、$\tilde{f}$ の R 上の積分により f の E 上の積分とする。つまり、

$$\int_E f(x,y)\,dxdy = \int_R f(x,y)\,dxdy$$

あきらかに、この値は長方形 $R \supset E$ の取り方によらない。(ただ、どのような E の上で連続関数が積分可能になるかはうるさく言い出すと難しい。ここでは簡単な集合上の積分を念頭におく)特に、1_E で E 上 1 の値を取り、E^c 上で 0 を取る関数を考えると、

$$\int_E 1_E(x,y)\,dxdy$$

は E の面積を表す。上の注意からこれは

$$\int 1_E(x,y)\,dxdy$$

と書いて構わない。1_E が積分可能なとき、E は**面積確定**という。

5.3 累次積分

長方形 $[a,b]\times[c,d]$ 上の関数 $f(x,y)$ の積分はまずどちらかをとめて片方の変数について積分し、その結果を残りの変数について積分する。これを累次積分という。

例 5.1 $\int_{[a,b]\times[c,d]} xy\,dxdy$ は次のように計算する。

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} xy\,dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d xydy\right) dx = \int_a^b x\frac{d^2-c^2}{2}\,dx = \frac{(b^2-a^2)(d^2-c^2)}{4}$$

y から先に積分したが、x から先に積分しても結果は変わらない。このことは後で詳しく調べる事にする。

縦線形の領域上の積分平面の部分集合 D が次のように表されている時、縦線形の領域という。

$$D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ a\le x\le b,\ \varphi(x)\le y\le\psi(x)\}$$

ただし、$\varphi(x)$, $\psi(x)$ は連続で、$\varphi(x)\le\psi(x)$ が $a\le x\le b$ で成り立っているものとする。（x と y の役割が入れ替わっていても良い）

　このとき、$f(x,y)$ が D で積分可能ならば

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left[\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy\right] dx$$

と逐次積分をすれば良い。これも後で詳しく述べる。

例 5.2 $f(x,y)=x^2y^2$ を円板 $\{x^2+y^2\le 1\}$ 上で積分する。

$$D = \{(x,y);\ -1\le x\le 1, -\sqrt{1-x^2}\le y\le\sqrt{1-x^2}\}$$

と書けるので、

$$
\begin{aligned}
\int_D x^2y^2\,dxdy &= \int_{-1}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} x^2y^2\,dy\right]dx \\
&= \int_{-1}^{1} x^2\left[\left.\frac{y^3}{3}\right|_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\right]dx \\
&= \int_{-1}^{1} 2x^2\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}\,dx \\
&= \frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^4 t\,dt \\
&= \frac{4}{3}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t\,dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 t\,dt\right)
\end{aligned}
$$

$I_m = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} t\,dt = \frac{(2m-1)!!}{2^m m!}\frac{\pi}{2}$ なので、求める積分の値は

$$
\frac{4}{3}\left(\frac{3}{2^3} - \frac{5\cdot 3}{2^3 3!}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{24}
$$

となる。

注意 5.1 上の例で x または y の指数が奇数ならば対称性に気をつけると定積分の値は 0 である事が分かる。

練習 5.1 次の累次積分を計算せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} x^2y\,dy\right)dx$　(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}-x} \sin(x+y)\,dy\right)dx$