定理 5.1 D が縦線形の領域、つまり連続な関数 $\varphi(x) \le \psi(x)$ に対して

$$D = \{(x,y);\, a \le x \le b, \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$

とかけるとき、（x と y の役割が入れ替わっても良い）$f(x,y)$ が $\overline{D}$ 上で連続ならば、

(1) $F(x) = \displaystyle\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy$ は区間 $[a,b]$ 上で連続で、従って積分可能で、

(2) 次の等式が成り立つ。

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_D f(x,y)\,dxdy$$

証明 (1) $F(x+h) - F(x)$ を計算してみる。

$$\begin{aligned}
F(x+h) - F(x) &= \int_{\varphi(x+h)}^{\psi(x+h)} f(x+h,y)\,dy - \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \\
&= \int_{\varphi(x+h)}^{\psi(x+h)} \big(f(x+h,y) - f(x,y)\big)\,dy \\
&\quad + \int_{\varphi(x+h)}^{\psi(x+h)} f(x,y)\,dy - \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,dy \\
&= \int_{\varphi(x+h)}^{\psi(x+h)} \big(f(x+h,y) - f(x,y)\big)\,dy \\
&\quad + \int_{\psi(x)}^{\psi(x+h)} f(x,y)\,dy - \int_{\varphi(x)}^{\varphi(x+h)} f(x,y)\,dy \\
&=: \quad I + II - III
\end{aligned}$$

$f(x,y)$ が有界閉集合 $\overline{D}$ 上で連続なので有界かつ一様連続として良く、このとき、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ がとれて $|h| + |k| < \delta$ ならば $|f(x+h,y+k) - f(x,y)| < \varepsilon$ が任意の $(x,y) \in D$ に対して成り立つ。これより、$|h| < \delta$ のとき

$$|I| < \varepsilon \times \max\{|\psi(x)| + |\varphi(x)|; a \le x \le b\}$$

また、$\overline{D}$ で f は連続なので有界になるので、$|f(x,y)| \le M$ が常に成り立つような M がとれて、

$$|II| \le M|\psi(x+h) - \psi(x)|, \qquad |III| \le M|\varphi(x+h) - \varphi(x)|$$

となる。$\psi(x), \varphi(x)$ は連続なので、II と III は $h \to 0$ のとき 0 に近づく。I は h が小さい時いくらでも小さいので、これも $h \to 0$ のとき 0 に行く。つまり $F(x)$ は連続。

(2) 長方形 $[a,b] \times [c,d]$ を D を含むように取り、$\tilde{f}$ で f を D の外で 0 になるように拡張したものとする。$[a,b]$ の分割 $\Delta_1 = \{a = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = b\}$ と $[c,d]$ の分割 $\Delta_2 = \{c = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = d\}$ をとると、

$$M_{i,j} = \max\{\tilde{f}(x,y)\,; s_{i-1} \le x \le s_i,\, t_{j-1} \le y \le t_j\}$$
$$m_{i,j} = \min\{\tilde{f}(x,y)\,; s_{i-1} \le x \le s_i,\, t_{j-1} \le y \le t_j\}$$

に対して $s_{i-1} \le x \le s_i$ ならば

$$\sum_j m_{i,j}|t_j - t_{j-1}| \le \int_c^d \tilde{f}(x,y)dy \le \sum_j M_{i,j}|t_j - t_{j-1}|$$

この各辺を $[s_{i-1}, s_i]$ で積分して、その後 i について加えると

$$\underline{S}_\Delta \le \int_a^b F(x)\,dx \le \overline{S}_\Delta$$

となる。ただし、 $\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2$. あとは $\tilde{f}$ が $[a,b] \times [c,d]$ で積分可能なことを言えばよいが、D の中では $\tilde{f} = f$ なので連続で、$M_{i,j} - m_{i,j}$ はどこででも一様に小さい。D の外では $\tilde{f} = 0$ なので、$M_{i,j} = m_{i,j} = 0$ だから、問題は $[s_{i-1}, s_i] \times [t_{j-1}, t_j]$ のうち、$y = \psi(x), y = \varphi(x)$ と重なるものが問題。このような i, j では $m_{i,j} = 0$ だが $M_{i,j}$ は大きい可能性がある。これは $y = \psi(x), y = \varphi(x)$ の一様連続性から $|\Delta_1|, |\Delta_2| < \delta$ なら

$$\begin{aligned}\overline{S}_\Delta - \underline{S}_\Delta \le &\varepsilon(b-a)(d-c)\\ &+ M \times (\max\{|\varphi(x) - \varphi(x')| + |\psi(x) - \psi(x')|\,; |x - x'| \le \delta\}\\ &+ 2\delta)(b-a)\end{aligned}$$

が $|\Delta| \le \delta$ の時に成り立つ。

□

5.4 積分順序の交換

重積分は x から積分しても y から積分しても良いという事を前に言った。ここではもう少し詳しくこの理由を考えてみる。定理 5.1 の証明では，縦と横は本質的な違いはないので，もし上の定理で

$$D = \{(x,y); c \le y \le d, g(y) \le x \le h(y)\}$$

となる $c \leq y \leq d$ で連続な関数 $g(y), h(y)$ があるならば同じように議論することで

$$\int_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

も成り立つ．つまり，積分の順序を入れ替え得ることができる．

注意 5.2 注意しないといけないのは，D について，x を先に止めて y の動く範囲と見たときと y を最初に止めて x の動く範囲とみたものはまるきり見かけが違うことである．例えば，$a, b, c, d > 0$ として

$$D = \{(x,y)\,;\, a \leq x \leq b, x - c \leq y \leq 2x + d\}$$

は，y を先に止めると $2a + d \geq b - c$ の時は

$$\begin{aligned} D =& \{(x,y)\,;\, a - c \leq y \leq b - c, a \leq x \leq y + c\} \\ & \cup \{(x,y)\,;\, b - c \leq y \leq 2a + d, a \leq x \leq b\} \\ & \cup \{(x,y)\,;\, 2a + d \leq x \leq 2b + d, \frac{y-d}{2} \leq x \leq b\} \end{aligned}$$

となる．（その他の場合は? 自分で考えて見てください）

例 5.3 積分域の書き直し 積分の順番を入れ換えると累次積分の積分の範囲が変わる。このことに注意して次の積分の順番を入れ換えてみる。

$$\int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^2 f(x,y)\,dy \right) dx$$

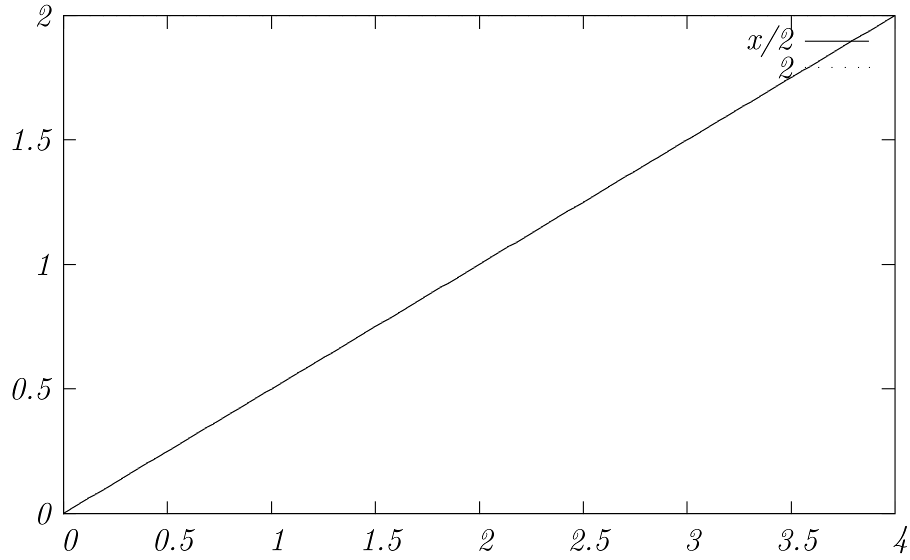
この場合、y の動ける範囲は $0 \leq y \leq 2$ であり、$\frac{x}{2} \leq y$ および $0 \leq x \leq 4$ より、

$$0 \leq x \leq 2y$$

が出てくる。したがってこの場合は簡単で、

$$\int_0^4 \left(\int_{\frac{x}{2}}^2 f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^2 \left(\int_0^{2y} f(x,y)\,dx \right) dy$$

となる。



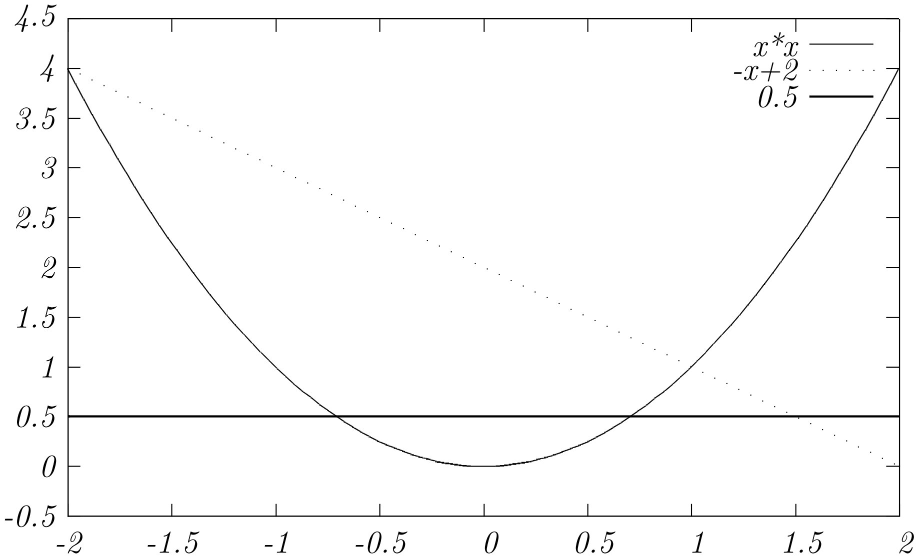
例 5.4 D を $y=x^2$, $y=-x+2$, $y=\frac{1}{2}$ で囲まれた $y \geq x^2$ を満たす領域として $\int_D xy\,dxdy$ を計算する。図より $y=-x+2$ と $y=x^2$ の交点は $(-2,4),(1,1)$ でどちらも $y=1/2$ の上にあるので、x で先に積分した方が積分範囲の分解が簡単。

$$\begin{aligned}
\int_D xy\,dxdy =& \int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} xy\,dxdy + \int_1^4 \int_{-\sqrt{y}}^{-y+2} xy\,dxdy \\
=& \int_1^4 \frac{1}{2}(y(2-y)^2 - y^2)dy \\
=& \frac{1}{2}\left[\int_1^4 y(y-2)^2 dy - 21\right] \\
\int_1^4 y(y-2)^2 dy =& \left[\frac{y(y-2)^3}{3}\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{(y-2)^3}{3}dy \\
=& 11 - \frac{5}{4} = \frac{39}{4}
\end{aligned}$$

従って

$$\int_1^4 \frac{1}{2}(y(2-y)^2 - y^2)dy = \frac{1}{2}\left(\frac{39}{4} - 21\right) = -\frac{45}{8}$$

となる.



練習 5.2 次の積分順序を交換せよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\,dydx$　　(2) $\displaystyle\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dxdy$

(3) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{x^{1/4}} f(x,y)\,dydx$　　(4) $\displaystyle\int_{1/2}^1 \int_{x^3}^{x} f(x,y)\,dydx$

5.5　多重積分

変数がたくさんある場合も積分は同じように定義できる。積分の順序も交換できるので、計算は累次積分によって実行できる。

5.5.1　三重積分

$\mathbb{R}^3$ の直方体 $R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ 上の有界な関数 $f(x,y,z)$ が R 上積分可能であるとは、$i = 1, 2, 3$ に対して $[a_i, b_i]$ の分割

$$\Delta_i := \{a_i = t_{i,0} < t_{i,1} < \ldots < t_{i,n(i)} = b_i\}$$

を任意にとるとき、これらで作った R の分割

$$\Delta = \Delta_1 \times \Delta_2 \times \Delta_3$$

について、$|\Delta| = \max\{|\Delta_i|; i = 1, 2, 3\}$ が 0 に近づくならば、過剰和

$$\overline{S}_\Delta = \sum_{0 \le j_1 \le n(1)} \sum_{0 \le j_2 \le n(2)} \sum_{0 \le j_3 \le n(3)} \max_{(x,y,z) \in C(j_1, j_2, j_3)} f(x, y, z) \times |C(j_1, j_2, j_3)|$$

および不足和

$$\underline{S}_\Delta = \sum_{0 \le j_1 \le n(1)} \sum_{0 \le j_2 \le n(2)} \sum_{0 \le j_3 \le n(3)} \min_{(x,y,z) \in C(j_1, j_2, j_3)} f(x, y, z) \times |C(j_1, j_2, j_3)|$$

がそれぞれ同じ極限に近づく時にいう。