10　ベクトル空間の基と次元

定義 10.1 V ベクトル空間．$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \in V$ が V を**生成する**とは 任意の $\boldsymbol{v} \in V$ が $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \in V$ の 1 次結合で書けることを言う．

V が $\mathbb{R}^2$ のとき $\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の二つのベクトルは $\mathbb{R}^2$ を生成する．どんな 2 次元列ベクトルも $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ の 1 次結合で書けているのだから．

10.1　ベクトル空間の基

定義 10.2 ベクトル空間 V のベクトルの組 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ が次の二つの条件を満たすとき，V の **基**，または **基底**という．

(1) $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ は 1 次独立．

(2) $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n\}$ は V を生成．

定理 10.1 (教科書 p.81, 定理 4.4.1) ベクトル空間 V の基に含まれるベクトルの個数は基のとり方によらず一定．

証明　$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ と $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ がどちらも V の基とする．$\boldsymbol{u}_i$ はすべて $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合でかけるので，定理 9.1（教科書定理 4.3.1）により，$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ の 1 次独立な最大個数 $(= m)$ は $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ の 1 次独立な最大個数 $(= n)$ 以下．よって $m \leq n$. n, m の役割を入れ替えて，$n \leq m$. $\square$

例 10.1 $\mathbb{R}^3$ の基本ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \boldsymbol{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

の 3 つは $\mathbb{R}^3$ の基．

例 10.2 (教科書 p.82, 例 4)
$\mathbb{R}[x]_3$ では $\{1, x, x^2, x^3\}$ が基になっている．（これらは 1 次独立）

10.2　ベクトル空間の次元

定義 10.3 零ベクトルのみからなるベクトル空間を零（ベクトル）空間という．ベクトル空間 V の基が有限個のベクトルからなるとき V を**有限次元ベクトル空間** と呼び，このとき，基に属するベクトルの個数（基のとり方にはよらない）を V の**次元** と呼び，$\dim(V)$ とか $\dim_{\mathbb{R}}(V)$ と書く．

定理 10.2 (教科書 p.82, 定理 4.4.2)
　ベクトル空間 V が有限次元であるための必要十分条件は V の 1 次独立なベクトルの最大個数が有限であることである．

証明　　V を有限次元とする．このとき V の基は有限個のベクトルからなり，これを $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ と書く．任意の V のベクトルはこれらの 1 次結合でかけるので，任意に $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n+1} \in V$ をとると定理 8.3（教科書定理 4.2.3）により，$\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_{n+1} \in V$ は 1 次従属．つまり，V の 1 次独立なベクトルの最大個数は n.

　逆に V の 1 次独立なベクトルの最大個数が $n < \infty$ のとき，V の 1 次独立なベクトル

$$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$$

が取れ，任意の V のベクトル $\boldsymbol{w}$ に対して

$$\boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$$

は $n+1$ 個あるので 1 次従属．定理 8.2（教科書定理 4.2.2）により，このとき $\boldsymbol{w}$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次結合で書け，

$$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$$

は V の基である．よって V は有限次元．　□

例 10.3 次の解空間の次元と基を一組求めよ

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \,;\ \begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = & 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 & = & 0 \end{array} \right.$$

解　与式は

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので，左辺の行列の簡約形を求める．

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 2 & 3\\ 2 & -4 & 3 & 3 & 8\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}1 & -2 & 0 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

したがって，主成分を含まない列ベクトルに対応する変数を $x_2 = c_1, x_4 = c_2$，$x_5 = c_3$ と置くと，$x_1 = 2c_1 - 3c_2 - c_3$，$x_3 = c_2 - 2c_3$ つまり

$$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2c_1 - 3c_2 - c_3\\ c_1\\ c_2 - 2c_3\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}-3\\ 0\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + c_3\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

解空間の次元は 3 で，基は

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix}2\\ 1\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix}-3\\ 0\\ 1\\ 1\\ 0\end{pmatrix} . \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

の３つで作られる.（これらは 1 次独立）