11　解空間の次元

11.1　同次形の連立 1 次方程式の解空間と基本解

　連立 1 次方程式の解空間の次元についてまとめる．連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間を W とする．(A は $m \times n$ 行列）W の次元は， x_i のうち値を自由に取れる (c_i) 個数（解の自由度）に等しく，これは A の簡約形 B の行の主成分を含まない列ベクトルの個数に等しい．つまり，

$$\dim(W) = n - \operatorname{rank}(A)$$

が成り立っている．これにより次の定理を得る．

定理 11.1 (教科書 p.84, 定理 4.4.3)
　A は $m \times n$ 行列とする．同次形の連立 1 次方程式 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の解空間

$$W = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ ; \ A\boldsymbol{x} = \mathbf{0} \quad \}$$

の次元は

$$\dim(W) = n - \operatorname{rank}(A)$$

で与えられる．

定義 11.1 同次形の連立方程式

$$A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$$

の解空間の一組の基を $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ の**基本解** と呼ぶ.

例 11.1 例 *10.3* の同次形の連立方程式：

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5; \begin{array}{lcl} x_1 - 2x_3 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = & 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 & = & 0 \end{array} \right\}$$

の一組の基として

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

が取れるので， $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\}$ がこの方程式の基本解である．

11.2　ベクトルの集合で生成される部分空間

ベクトル空間 V の部分集合 $\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ の 1 次結合の全体：

$$W = \{c_1\boldsymbol{u}_1 + \cdots + c_m\boldsymbol{u}_m \mid c_i \in \mathbb{R}^n\}$$

は V の部分空間で，これを

$$W = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \rangle_{\mathbb{R}} \quad \text{または } W = \langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \rangle$$

と書く．定理 10.2 （教科書 定理 4.4.2) により

定理 11.2 (教科書 p.84, 定理 4.4.4)

$$\dim(\langle \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \rangle) = \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m \text{ の 1 次独立なベクトルの最大個数}$$

となる．

ベクトル空間の次元 $\dim(V) = n$ がわかっているとき，$\{\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m\}$ が基になっているためには，V の任意の元が $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ の 1 次結合でかけるか，$m = n$ で $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ が 1 次独立であればよい．

定理 11.3 (教科書 p.85, 定理 4.4.5)

$\dim(V) = n$ とする．V の n 個のベクトル $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ について以下の３条件は同値である．

(1) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は V の基.

(2) $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ は 1 次独立.

(3) $\langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle = V$

証明

(1) $\Rightarrow$ (2) は基の定義から明らか.

(2) $\Rightarrow$ (3) を示す．V の次元は n なので 1 次独立なベクトルの最大個数が n. よって $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots \boldsymbol{v}_n\}$ にどんなベクトルを加えても 1 次従属で，このとき $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n \rangle$ となっている．

(3) $\Rightarrow$ (1) 定理 9.1 （教科書 定理 4.3.1) より V の 1 次独立なベクトルの最大個数 $(= n)$ は $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ の 1 次独立なベクトルの最大個数以下. これは $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_n$ が 1 次独立でなければ成り立たない.

□

例 11.2 (教科書 p.85, 例 7)

次の 3 つの $\mathbb{R}^3$ のベクトルたちは 1 次独立であるので，$\mathbb{R}^3$ の基になる．

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

実際，この 3 つを列ベクトルとする行列は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

で簡約形は単位行列である．よって $\mathrm{rank}(A) = 3$ となり，これらの列ベクトルは 1 次独立.

例 11.3 (教科書 p.85, 例 8)

$\dim(\mathbb{R}[x]_2) = 3$ で，$1, x, x^2$ が基だったが，$f_1 = x+x^2$，$f_2 = 1-x^2$，$f_3 = x$ の 3 つのベクトルを考えると

$$\begin{aligned} 1 &= f_1 + f_2 + f_3, \\ x &= f_1 + f_2, \\ x^2 &= f_1 - f_3 \end{aligned}$$

となるので，f_1, f_2, f_3 は $\mathbb{R}[x]_2$ の基になっている.（任意の $\mathbb{R}[x]_2$ の元は f_1, f_2, f_3 の 1 次結合で書ける.）

練習 11.1 次のベクトル空間 W の次元と一組の基を求めよ

$$(1)\ W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \middle| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \right\},$$

$$(2)\ W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^5 \middle| \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & -7 & 10 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} = \mathbf{0} \right\},$$