14 補足：直交補空間

定義 14.1 内積空間 V の部分空間 W に対して

$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{u} \in V\,;\ \text{すべての}\boldsymbol{v} \in W \text{ に対して } (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = 0\}$$

とおき，W の **直交補空間** と呼ぶ

$W^{\perp}$ は V の部分空間である．これを確かめよう．定理 7.1 により，

- $\mathbf{0} \in W^{\perp}$,
- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W^{\perp}$ ならば $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W^{\perp}$,
- $a \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \in W^{\perp}$ ならば $a\boldsymbol{u} \in W^{\perp}$

の 3 つを確かめれば良い．

- まず勝手に V の元 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ をとる．$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{v}$ だから

  $$(\mathbf{0}, \boldsymbol{u}) = (0\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 0(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = 0$$

  となる．したがって特に $\boldsymbol{u} \in W$ を考えると，$\mathbf{0} \in W^{\perp}$ がわかる．

- $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W^{\perp}$ とすると $\boldsymbol{w} \in W$ のとき

  $$(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$$

  よって $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W^{\perp}$.

- $a \in \mathbb{R}, \boldsymbol{u} \in W^{\perp}$ とする． $\boldsymbol{w} \in W$ のとき，

  $$(a\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = a(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = a \cdot 0 = 0$$

  だから $a\boldsymbol{u} \in W^{\perp}$.

以上により，$W^{\perp}$ は部分空間になる．

定理 14.1 (i) $W \cap W^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$,

(ii) W_1, W_2 がベクトル空間 V の部分空間であるとき

$$W_1 \subset W_2 \longrightarrow W_1^{\perp} \supset W_2^{\perp}$$

証明　(i) $W, W^\perp$ はともに V の部分空間だから $\mathbf{0} \in W \cap W^\perp$ である．$\boldsymbol{v} \in W \cap W^\perp$ とすると，

$$(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = 0$$

なので，これは $\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$ を意味している．($Vecv \neq \mathbf{0}$ ならば，内積の性質 (4) により $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) > 0$)

(ii) $W_1 \subset W_2$ とすると，$\boldsymbol{u} \in W_2^\perp$ のとき $\boldsymbol{w} \in W_1$ ならば $\boldsymbol{w} \in W_2$ となり，

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = 0,$$

つまり $\boldsymbol{u} \in W_1^\perp$ である．したがって，$W_1^\perp \supset W_2^\perp$.　□

定理 14.2 V が有限次元ベクトル空間で，W がその部分空間とする．このとき W の基 $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ に対して

$$W^\perp = \{\boldsymbol{u} \in V\,;\, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_j) = 0, j = 1, \ldots, k\}$$

証明　右辺の集合を W_0 とかく．$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in W$ なのだから $\boldsymbol{u} \in W^\perp$ ならば

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_j) = 0, j = 1, \ldots, k$$

が成り立つ．したがって $W^\perp \subset W_0$ は明らか．一方，任意の $\boldsymbol{v} \in W$ は

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + \cdots + c_k\boldsymbol{v}_k$$

と基の 1 次結合で書けるので，$\boldsymbol{u} \in W_0$ のとき

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = c_1(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_1) + \cdots + c_k(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_k) = 0$$

となり，$\boldsymbol{u} \in W^\perp$ である．　□

したがって $W^\perp$ は連立方程式

$$(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_j) = 0, j = 1, \ldots, k$$

の解空間として理解できる．この解空間の次元は $m = \dim(V) - k$ だったので $\dim(W^\perp) = m$. $W^\perp$ の 1 次独立な基を $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$ とする．今，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_k\boldsymbol{v}_k + c_{k+1}\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_{k+m}\boldsymbol{u}_m = \mathbf{0}$$

とすると，移項して，

$$c_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + c_k\boldsymbol{v}_k = -(c_{k+1}\boldsymbol{u}_1 + \ldots + c_{k+m}\boldsymbol{u}_m)$$

となるが，左辺は W の元で 右辺は $W^{\perp}$ の元なので，定理 14.1 により両辺ともに $\mathbf{0}$ に等しい．$\{\boldsymbol{v}_j\}$, $\{\boldsymbol{u}_i\}$ はそれぞれ 1 次独立だから，これよりすべての $c_1, \ldots, c_{k+m}$ は 0 となり $k+m=\dim(V)$ だから

$$\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k, \boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_m$$

が V の基となっている．これより次のことが分かる

定理 14.3 $\boldsymbol{v} \in V$ ならば $\boldsymbol{w} \in W$ と $\boldsymbol{u} \in W^{\perp}$ があり，

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w} + \boldsymbol{u}$$

とできる．このような $\boldsymbol{w} \in W$ と $\boldsymbol{u} \in W^{\perp}$ はただ一通りしかない．

証明　前半は上で言ったこと．後半については $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in W$ と $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in W^{\perp}$ に対して

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{w}_2 + \boldsymbol{u}_2$$

となったとすると，移項して

$$\boldsymbol{w}_1 - \boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_2 - \boldsymbol{u}_1$$

左辺は W の元で右辺は $W^{\perp}$ の元なので，これは $\mathbf{0}$ に等しい．よって $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$. □

例 14.1 $V = \mathbb{R}^3$,

$$W = \left\{ \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 ;\ \begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 & = & 0 \end{array} \right\}$$

のとき，$W^{\perp}$ を求めよ．**解**　W の基を求める．これは上の方程式の基本解を求めることで，

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

の簡約形を求めると

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

これより 主成分でない $x_3 = c$ と書くことにより

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5c \\ -3c \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって W の基は $\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. これより

$$W^{\perp} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\,;\,(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = 0\} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3\,;\,5x_1 - 3x_2 + x_3 = 0\}$$

これは $x_2 = s, x_3 = t$ と置くと解は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3s/5 - t/5 \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$W^{\perp}$ の基は

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ととれる. $\dim(W^{\perp}) = 2$.