2　$m \times n$ 行列とその計算

2.1　行列に関する定義

m, n を自然数として $m \times n$ 行列は次の形をしている．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

それぞれの $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ に対して， a_{ij} を行列 A の (i,j)-**成分**と言い，横に並ぶ n 次元ベクトル $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ $(1 \leq i \leq m)$ を**行ベクトル**，縦に並ぶ m 次元ベクトル

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

$(1 \leq j \leq n)$ を**列ベクトル**とよぶ．行ベクトルは $1 \times n$ 行列であり，列ベクトルは $m \times 1$ 行列である．

- すべての成分が 0 の行列は**零行列**と呼ばれ，サイズを特定するときは (m, n)-零行列を $O_{m,n}$ と書く．
- $n \times n$ 行列は縦と横の大きさが同じなので，**正方行列** とよぶ．
- 正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ の成分 a_{ii} を**対角成分**と呼び，対角成分以外の成分がすべて 0 のときこの行列を **対角行列**という．
- 対角成分がすべて 1 の $n \times n$ 対角行列を **単位行列**と呼び，E_n と表す．
- 対角成分がすべて同じ数の対角行列を **スカラー行列**という．
- $m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ に対して，その行と列を入れ替えた $n \times m$ 行列 $(a_{ji})_{1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq m}$ を A の**転置行列**とよび，${}^tA$ と書く．

2.2 行列の和，差，スカラー倍

行列 A, B が $m \times n$ 行列のとき，$(A, B$ は**同じ型**という$)$ 和 $A + B$ が定義できる．

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$A + B$ の成分は A の成分と B の成分の和になっている．同様に $A - B$ は

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ a_{21} - b_{21} & \dots & a_{2n} - b_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

で与えられる．A のスカラー倍は c をスカラーとして，

$$cA = c \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca_{11} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ ca_{m1} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix}$$

とすべての成分を c 倍することによって得られる．

2.3 行列の積

$m \times n$ 行列 A と $k \times l$ 行列 B に対して $\underline{A \text{ の列の数 } n \text{ と } B \text{ の行の数 } k \text{ が等しいときにのみ}}$ 積 AB が $m \times l$ 行列として次のように定義される．

$$(AB)_{is} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{js}$$

これは A の行ベクトル $\boldsymbol{a}_i$ と B の列ベクトル $\boldsymbol{b}_s$ の内積を取ったものになっている．(後でまた詳しく説明)

この定義からこれまで扱ってきた行列を (列) ベクトルに左からかける操作が行列の掛け算として理解できる．また，n 次元行ベクトルには $n \times m$ 行列 $(m \geq 1)$ を右からかけることができることもわかる．

- **和の可換性**

$$A + B = B + A, \quad A + O = A.$$

- **和の結合律**

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

- **単位元と零元の積**

$$AE = EA = A,\ AO = O,\ OA = O.$$

- **積の結合律**

$$(AB)C = A(BC).$$

- **スカラー倍の性質**

$$0A = O,\ 1A = A,\ (ab)A = a(bA),\ (aA)B = a(AB).$$

- **分配率**　a, b をスカラー，A, B を $m \times n$ 行列として

$$a(A + B) = aA + aB,\ (a + b)A = aA + bA,$$

B, C が同じ型の行列で，積 AB, AC が定義できるなら，

$$A(B + C) = AB + AC,$$

同様に，A, B が同じ型の行列で，積 AC, BC が定義できるなら

$$(A + B)C = AC + BC$$

- **和・積と転置行列** A, B が同じ型のとき

$${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB,$$

また，積 AB が定義できるとき

$${}^t(AB) = {}^tB{}^tA$$

2.4 行列の分割

行列の行，列をそれぞれいくつかのグループに分けて考える．

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2t} \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{st} \end{pmatrix}$$

A の列の総数 n を $n_1, n_2, \dots n_t$ 個ずつに分ける．B の行の総数が n なら AB が定義できるが，B の行も対応して n を $n_1, n_2, \dots n_t$ 個ずつに分ける．

$$B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1r} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2r} \\ \vdots & & & \vdots \\ B_{t1} & B_{t2} & \dots & B_{tr} \end{pmatrix}$$

このとき，

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1r} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2r} \\ \vdots & & & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \dots & C_{sr} \end{pmatrix}, \quad C_{ij} = \sum_{l=1}^{t} A_{il} B_{lj}$$

と書ける．

例 2.1 (教科書 p.12, 例題 1.3.2)

A_1, B_1 が m 次正方行列，A_2, B_2 が n 次正方行列ならば

$$\begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 & O \\ O & B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & O \\ O & A_2 B_2 \end{pmatrix}$$

練習 2.1 (1) つぎの行列 A の n 乗 A^n を計算せよ

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 下の A, B について積 AB は可換か？つまり $AB = BA$ か？

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$